計算可能位相空間論

Matthew de Brecht　（マシュー・ディブレクト）

京都大学大学院　人間・環境学研究科
matthew@i.h.kyoto-u.ac.jp

数学基礎論サマースクール (2023 年 9 月 11 日〜15 日)

Table of Contents

1. 位相空間の復習
2. Type-2 チューリング機械
3. 表現付き空間と実現（計算）可能関数
   - 表現付き空間
   - 実現可能性と計算可能性
   - 直和空間
   - 直積空間
   - 関数空間
   - 単純型付きラムダ計算
4. 第二可算空間
   - 計算可能距離空間
   - 計算可能位相空間
   - Quasi-Polish 空間

Table of Contents

5. 許容的表現
    - 許容的表現
    - 許容的表現付き空間の基本定理
    - 許容的表現を持つ空間の特徴付け
    - $\mathbf{QCB}_0$ 空間

6. 計算可能位相空間論のトピック
    - 離散空間
    - ハウスドルフ空間
    - $\mathbb{S}^X$ の束構造
    - コンパクト集合
    - オーバート集合
    - 応用例

7. 参考文献

Table of Contents

1. 位相空間の復習
2. Type-2 チューリング機械
3. 表現付き空間と実現（計算）可能関数
    - 表現付き空間
    - 実現可能性と計算可能性
    - 直和空間
    - 直積空間
    - 関数空間
    - 単純型付きラムダ計算

位相空間

- 集合 X の冪集合を $\mathcal{P}(X)$ と書く。
- 集合 X と $\mathbf{O}(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$ が次の条件を満たすとき、$(X, \mathbf{O}(X))$ を位相空間 (topological space) という。
  - $\mathbf{O}(X)$ は任意の結び (arbitrary unions) に閉じている。
    - つまり、$\mathcal{S} \subseteq \mathbf{O}(X)$ ならば $\bigcup \mathcal{S} \in \mathbf{O}(X)$ が成り立つ。
    - 注: 空の結び $\emptyset = \bigcup \emptyset$ は $\mathbf{O}(X)$ の元である。
  - $\mathbf{O}(X)$ は有限の交わり (finite intersections) に閉じている。
    - つまり、$\mathcal{F} \subseteq \mathbf{O}(X)$ が有限であれば $\bigcap \mathcal{F} \in \mathbf{O}(X)$ が成り立つ。
    - 注: 空の交わり $X = \bigcap \emptyset$ は $\mathbf{O}(X)$ の元である。
- $\mathbf{O}(X)$ を X 上の位相 (topology) と呼ぶ。X の元を点 (points) といい、$\mathbf{O}(X)$ の元を開集合 (open sets) という。開集合の補集合を閉集合 (closed set) という。

位相空間の例

- $\mathbf{O}(X) = \mathcal{P}(X)$ を X 上の離散位相 (discrete topology) という。
    - $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ は離散位相を持つと仮定する。
    - 自然数 $\mathbb{N}$ は離散位相を持つと仮定する。
- $\mathbb{S} = \{\bot, \top\}$, $\mathbf{O}(\mathbb{S}) = \{\emptyset, \{\top\}, \mathbb{S}\}$ をシェルピンスキー空間 (Sierpinski space) という。
- $\mathbb{R}$ 上のユークリッド位相 (Euclidean topology) は

$$\mathbf{O}(\mathbb{R}) = \{U \subseteq \mathbb{R} \mid (\forall x \in U)(\exists r > 0) B_r(x) \subseteq U\}$$

と定義される。ただし、$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < r\}$ は中心 x と半径 r を持つ開球である。

観察可能な性質

- 位相空間の開集合は観察可能な性質、または確認可能な性質（有限時間内に半決定できる性質）と解釈できる。
  - 例えば、$P = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 0\}$ は観察可能である。なぜならば、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し、もし $x \in P$ ならば x を十分高い精度で測定すれば $x \in P$ を確認できる。
  - 一方、$\neg P = \mathbb{R} \setminus P = \{0\}$ は観察可能ではない。なぜならば、いくら正確に測定しても小さな誤差が残る可能性があるため、一般に $x = 0$ を有限時間内に確認できない。
- 観察可能な性質の任意の結びは観察可能である：
  - $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ を観察するには、並列的に $x \in U_i$ となる $i \in I$ を探せばよい。
- 観察可能な性質の有限の交わりは観察可能である：
  - F が有限であれば、$x \in \bigcap_{i \in F} U_i$ を観察するには、全ての $i \in F$ に対し $x \in U_i$ を確認すればよい。
- しかし、観察可能な性質の無限の交わりは観察可能であると限らない:
  - I が無限であれば、$x \in \bigcap_{i \in I} U_i$ を観察するために、無限個の性質 $x \in U_i$ を観察する必要があるが、それは有限時間内にできると限らない。

連続関数

- 位相空間 X と Y の間の関数 $f\colon X \to Y$ が連続 (continuous) であるとは、任意の $U \in \mathbf{O}(Y)$ に対し $f^{-1}(U) \in \mathbf{O}(X)$ が成り立つことである。
- 直感的に、連続関数は（理想的な意味で）計算できる、または、物理的に実現できる関数と解釈する。
  - $f\colon X \to Y$ を物理的に実現できるとし、$U \subseteq Y$ が観察可能であるとする。任意の $x \in X$ に対し、$x \in f^{-1}(U)$ を観察するために、$f(x)$ を計算し $f(x) \in U$ を観察すればよい。従って、$f^{-1}(U)$ は X の観察可能性質である。
  - 逆に、$f\colon X \to Y$ が連続であるとする。$f(x) \in U$ を観察するには $x \in f^{-1}(U)$ を観察すればよいので、$f(x)$ の観察可能な性質を全て確認できる。従って、Y の各点がその点の観察可能な性質で定まるのであれば、$f(x)$ を特定できる。

分離公理 (Separation axioms)

- $(X, \mathbf{O}(X))$ が T_0 分離公理を満たす、または X が T_0-空間であるとは、任意の $x, y \in X$ に対し、

$$x = y \iff (\forall U \in \mathbf{O}(X))\,[x \in U \iff y \in U]$$

  が成り立つことである。
- 全ての $x \in X$ に対し $\{x\}$ が閉集合であるとき、X を T_1-空間という。
- X が T_2-空間、またはハウスドルフ空間 (Hausdorff space) であるとは、任意の $x, y \in X$ に対し $x \neq y$ ならば

$$x \in U \text{ かつ } y \in V \text{ かつ } U \cap V = \emptyset$$

  を満たす $U, V \in \mathbf{O}(X)$ が存在することである。
- 注: $T_2 \implies T_1 \implies T_0$

この講義では、全ての位相空間が T_0 分離公理を満たすと暗黙的に仮定する！

分離公理の例

例:

- X が二つ以上の元を持つ集合であるとき、$\mathbf{O}(X) = \{\emptyset, X\}$ とすれば、X は T_0 分離公理を満たさない。
- シェルピンスキー空間 $\mathbb{S}$ は T_0-空間であるが T_1-空間ではない。
- X が無限集合であるとき、

$$S \in \mathbf{O}(X) \iff S = \emptyset \text{ 又は } X \setminus S \text{ が有限である}$$

とすれば、X は T_1-空間であるが T_2-空間ではない。
- $\mathbb{R}$ は T_2-空間である。

第二可算空間 (Second countable space)

- $\mathcal{B} \subseteq \mathbf{O}(X)$ とする。任意の $U \in \mathbf{O}(X)$ に対し、

$$U = \bigcup_{B \in I} B$$

となる $I \subseteq \mathcal{B}$ が必ず存在するとき、$\mathcal{B}$ を X の基底 (basis) という。X が可算な基底 $\mathcal{B}$ を持つとき、X を第二可算空間という。

- 例:
  - ユークリッド位相を持つ $\mathbb{R}$ は第二可算空間である。
  - 離散位相を持つ $\mathbb{R}$ は第二可算空間ではない。

- 位相空間 $(X, \mathbf{O}(X))$ と部分集合 $S \subseteq X$ が与えられたとき、

$$\mathbf{O}(S) = \{U \cap S \mid U \in \mathbf{O}(X)\}$$

と定義した位相空間 $(S, \mathbf{O}(S))$ を X の部分空間という。

  - (Borel-Selivanov) $S \subseteq X$ とする。

$$S = \{x \in X \mid (\forall i \in \mathbb{N})\,[x \in U_i \Rightarrow x \in V_i]\}$$

  となる $U_i, V_i \in \mathbf{O}(X)$ $(i \in \mathbb{N})$ が存在するとき、S を X の $\mathbf{\Pi}^0_2$ 部分空間と呼び、$S \in \mathbf{\Pi}^0_2(X)$ と書く。

- $f\colon X \to Y$ を連続関数とする。f の連続な逆関数 $g\colon Y \to X$ が存在すれば、f を同相写像 (homeomorphism) という。
  - 注:$f\colon X \to Y$ が連続な全単射であっても同相写像であるとは限らない。例えば、$f\colon \mathbf{2} \to \mathbb{S}$ を $0 \mapsto \bot$、$1 \mapsto \top$ と定義すれば、f が連続な全単射であるが連続な逆関数は存在しない。

- 同相写像 $f\colon X \to Y$ が存在するとき、X と Y が同相 (homeomorphic) であるという。

直積位相 (Product topology)

Definition

位相空間 X と Y の（集合論的な）直積 $X \times Y$ 上の直積位相は
$W \in \mathbf{O}(X \times Y) \iff$

$$(\forall \langle x, y \rangle \in W)(\exists U \in \mathbf{O}(X))(\exists V \in \mathbf{O}(X))\,[\langle x, y \rangle \in U \times V \subseteq W]$$

として定義される。

Definition

$K \subseteq X$ がコンパクトであるとは、$K \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ を満たす $\mathcal{U} \subseteq \mathbf{O}(X)$ に対し、$K \subseteq \bigcup \mathcal{F}$ となる有限な $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ が必ず存在することである。

- Example: $K \subseteq \mathbb{N}$ がコンパクト集合であるための必要十分条件は K が有限であることである。
- Example: 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対し、閉区間 $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ がコンパクトである。
  Proof:
  - $[a, b] \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ ($U_i \in \mathbf{O}(\mathbb{R})$) とする。$V_n = \bigcup_{i \leq n} U_i$ とする。矛盾を導くために全ての $n \in \mathbb{N}$ に対し $[a, b] \not\subseteq V_n$ と仮定する。$r_n = \inf\{r \in [a, b] \mid r \notin V_n\}$ とすれば、$r_n \notin V_n$ かつ $r_n \leq r_{n+1}$ が成り立つ。$r = \sup_{n \in \mathbb{N}} r_n$ とする。$[a, b]$ が閉区間であるため $r \in [a, b]$ が成り立ち、$r \in U_i$ を満たす $i \in \mathbb{N}$ が存在する。しかし、$(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が r に収束するためほとんど全ての $n \in \mathbb{N}$ に対し $r_n \in U_i$ となり、r_n の選び方と矛盾する。 $\square$

コンパクト開位相 (Compact-open topology)

- 集合 X と $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が与えられたとき、$\mathcal{G}$ から生成される位相 $\mathbf{O}(X)$ は $\mathcal{G}$ を含む X 上の最小の位相として定義される。このとき、$U \subseteq X$ に対し、$U \in \mathbf{O}(X)$ となる必要十分条件は、$x \in U$ ならば $x \in \bigcap \mathcal{F} \subseteq U$ を満たす有限 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ が存在することである。
- X と Y が位相空間であるとき、X から Y への連続関数 $f\colon X \to Y$ 全体の集合を Y^X と表す。

Definition

$K \subseteq X$ がコンパクト集合で、$U \subseteq Y$ が開集合であるとき、

$$[K, U] = \{f \in Y^X \mid K \subseteq f^{-1}(U)\}$$

と定義する。Y^X 上のコンパクト開位相は上記のように $[K, U]$ と表せる部分集合全体から生成される位相と定義する。

- 直感的に、$f \in [K, U]$ を確認するために $(\forall x \in K)\, f(x) \in U$ を確認すればよい。

特殊化順序 (Specialization order)

- 位相空間 $(X, \mathbf{O}(X))$ の特殊化順序は
$$x \leq_X y \iff (\forall U \in \mathbf{O}(X))\,[x \in U \Rightarrow y \in U]$$
として定義される。
  - 注：X が T_0-空間であれば $(X, \leq_X)$ が半順序集合となる。
- 演習問題: $f\colon X \to Y$ が連続ならば f は特殊化順序において単調であることを示せ。
  - つまり、$x \leq_X y \Rightarrow f(x) \leq_Y f(y)$ が成り立つことを示せ。
- 演習問題: X と Y が共に有限な (T_0-) 空間ならば、特殊化順序において単調な関数は連続であることを示せ。

- $(P, \leq)$ を半順序集合とする。
- $V \subseteq P$ が $x \in V \,\&\, x \leq y \Rightarrow y \in V$ を満たすとき V を上向き集合 (upper-set) という。
- $D \subseteq P$ が有向集合 (directed set) であるとは、$D \neq \emptyset$、かつ、任意の $x, y \in D$ に対し $x \leq z \,\&\, y \leq z$ を満たす $z \in D$ が必ず存在することである。
- $U \subseteq P$ が次の条件を満たすとき、U を Scott-開集合 (Scott-open set) という。
  - U が上向き集合である、かつ、
  - 有向集合 $D \subseteq P$ の結び $\bigvee D$ が存在するとき、$\bigvee D \in U$ ならば $D \cap U \neq \emptyset$ が成り立つ。
- P の Scott-開集合全体からなる位相を P 上の Scott-位相という。
- 演習問題: $(X, \mathbf{O}(X))$ が有限な (T_0-) 空間ならば、$\mathbf{O}(X)$ は特殊化順序 $\leq_X$ における Scott 位相と一致することを示せ。

自然数の冪集合 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

- 自然数の冪集合 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ は Scott-位相を持つとする。
  - 任意の有限 $F \subseteq \mathbb{N}$ に対し、$\uparrow F = \{S \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid F \subseteq S\}$ は Scott-開集合であり、そして $\{\uparrow F \mid F \subseteq \mathbb{N}\text{が有限である}\}$ が $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 上の Scott-位相の基底であることを示すことができる。
- $S \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ の指示関数を $\chi_S \colon \mathbb{N} \to \mathbb{S}$

$$\chi_S(n) = \begin{cases} \top & n \in S\text{のとき} \\ \bot & n \notin S\text{のとき} \end{cases}$$

  と定義すれば、$S \mapsto \chi_S$ は $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ から $\mathbb{S}^{\mathbb{N}}$ への同相写像である。ただし、$\mathbb{S}^{\mathbb{N}}$ はコンパクト開位相を持つとする。
- 一方、$\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ にコンパクト開位相を備えた空間はカントール空間 (Cantor space) と呼ばれる。$S \subseteq \mathbb{N}$ を指示関数 $\chi'_S \colon \mathbb{N} \to \mathbf{2}$ とみなすこともできるが、$\mathbb{S}^{\mathbb{N}}$ と $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ は同相ではない。
- $\mathbb{S}^{\mathbb{N}}$ は $\mathbb{N}$ の半決定可能な部分集合に対応するが、$\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ は $\mathbb{N}$ の決定可能な部分集合に対応する。
  - $\mathbb{S}^{\mathbb{N}}$ の計算可能の点は $\mathbb{N}$ の c.e. 部分集合と一致するが、$\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ の計算可能の点は $\mathbb{N}$ の再帰的部分集合と一致する。

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ と第二可算空間

第二可算空間の中で、$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ は次の意味で普遍的である。

Theorem

全ての第二可算 (T_0-) 空間を $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ に埋め込みできる。

Proof: $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ が X の可算基底ならば、$e\colon X \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ を

$$e(x) = \{i \in \mathbb{N} \mid x \in B_i\}$$

と定義すれば、X と $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ の部分空間 $\mathrm{im}(e) = \{e(x) \mid x \in X\}$ は同相となる。 $\square$

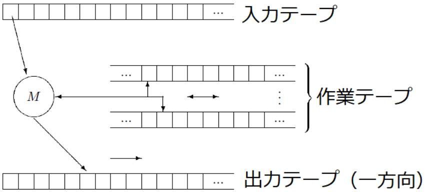
注: 一方、$\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ はハウスドルフ空間であるため $\mathbb{S}$ を $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ に埋め込み出来ない。従って、$\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ は上記の意味で普遍的ではない。

Table of Contents

1. 位相空間の復習
2. Type-2 チューリング機械
3. 表現付き空間と実現（計算）可能関数
   - 表現付き空間
   - 実現可能性と計算可能性
   - 直和空間
   - 直積空間
   - 関数空間
   - 単純型付きラムダ計算

このセクションの主な参考文献：[23]

Type-2 チューリング機械



(Modified from “Computable Analysis”, K. Weihrauch [23])

- Type-2 チューリング機械はチューリング機械と同様に 3 種類のテープを持つ（入力テープ、有限個の作業テープ、出力テープ)。それぞれのテープには無限個のマスがあり、それぞれのマスは空白であるか固定された（有限) アルファベットの記号を含む。
- テープ上に左右に移動しながら記号を読んだり書いたりするヘッドがある。ただし、出力テープ上のヘッドは一方向のみ移動できる (つまり、一度出力した記号を消したり上書きしたりできない)。
- テープの内容と別に、固定された有限個の状態のうちで機械の状態が遷移する。現在の状態とヘッドの下にある記号に対し次に書き込む記号やヘッドの移動先や次の状態を決める有限個の命令（プログラム）がある。

Type-2 チューリング機械

- Type-2 チューリング機械と通常のチューリング機械の違いは、Type-2 チューリング機械が停止することなく、無限に長い入力を読んで無限に長い出力を書いていくことである。
- 従って、通常のチューリング機械を部分関数 $M :\subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ とみなすように、Type-2 チューリング機械を部分関数 $M :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ とみなせる。
  - 自然数が有限アルファベットで符号化されていると仮定する。
  - 無限自然数列 $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ を入力として Type-2 チューリング機械 M を実行した時に、M が出力テープに書き込む自然数列を $M(p)$ と表す。
  - 入力 p に対し M が無限自然数列を出力しない場合に、$M(p)$ が未定義であるとする。
- 定義域 $dom(f)$ を持つ部分関数 $f :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が計算可能であるとは、

$$M(p) = \begin{cases} f(p) & p \in dom(f) \text{のとき} \\ \text{未定義} & p \notin dom(f) \text{のとき} \end{cases}$$

を満たす Type-2 チューリング機械 M が存在することである。
  - $dom(f) = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ のとき、f を全域関数という。

Type-2 チューリング機械

- Type-2 チューリング機械は無限列を入力・出力するが、機械の振る舞いは有限個の命令で定まる。
- 従って、通常のチューリング機械と同様に、全ての Type-2 チューリング機械の計算可能な枚挙 $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ が存在する。
- 入力 $i \in \mathbb{N}$ と $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ に対し $M_i(p)$ を出力する万能 Type-2 チューリング機械も存在する。

$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ の位相について

- 自然数の有限列全体の集合を $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ と書く。
- $\sigma \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ が自然数列 p の接頭辞であることを $\sigma \sqsubseteq p$ と表す。真の接頭辞であるときに $\sigma \sqsubset p$ と書くこともある。
- $\sigma \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ に対し、$\uparrow\sigma = \{p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \sigma \sqsubset p\}$ と定義する。
- 自然数 $\mathbb{N}$ は離散位相を持つとする。
- 自然数の無限列全体の集合 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ はコンパクト開位相を持つとする。

Lemma

$U \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ に対し、$U \in \mathbf{O}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ となるための必要十分条件は

$$(\forall p \in U)(\exists \sigma \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}})\,[p \in \uparrow\sigma \subseteq U]$$

が成り立つことである。

Proof: 演習問題。

Theorem

$f :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が計算可能ならば、f が連続である。

Proof:

- Type-2 チューリング機械 M が f を計算し、$p \in dom(f)$ と有限接頭辞 $\tau \sqsubset f(p)$ を固定する。
- $M(p) = f(p)$ であるため、入力 p に対し M が有限計算ステップ以内に出力テープに τ を書き込む。
- 出力テープに τ を書き込んだとき、M の入力ヘッドが p の有限接頭辞しかアクセスできない。入力ヘッドがアクセスした接頭辞を $\sigma \sqsubset p$ とする。
- よって、任意の $q \in dom(f)$ に対し、$\sigma \sqsubset q$ ならば M が出力テープに τ を書き込む。従って、$p \in {\uparrow}\sigma \cap dom(f) \subseteq f^{-1}({\uparrow}\tau)$ が成り立ち、f が連続である。 $\square$

神託 Type-2 チューリング機械

- 上の定理の逆は成り立たない。
  - 演習問題: 計算不可能な部分連続関数が存在することを示せ。
- 部分連続関数とほぼ同値な概念を得るために神託機械を導入する。

Definition

神託 Type-2 チューリング機械は入力・作業・出力テープの他に、無限自然数列（神託）で初期化された読み込み専用の神託テープがある。神託機械が時々神託を参考しながら有限のプログラムに従って計算を行う。

神託 Type-2 チューリング機械と連続性

Theorem

部分連続関数 $f :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ を計算する神託 Type-2 チューリング機械が存在するための必要十分条件は $dom(f) \in \mathbf{\Pi}^0_2(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ が成り立つことである。

Proof:

- 神託機械 M が f を計算するのであれば、

$$p \in dom(f) \iff (\forall n \in \mathbb{N})\,[\ M(p)(n)\text{ が定義される}]$$

となり、$dom(f) \in \mathbf{\Pi}^0_2(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ が成り立つ。
- 逆に、$dom(f) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ $(U_n \in \mathbf{O}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}))$ と仮定する。
$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ を計算可能な全単射とし、次の条件を満たす対 $\langle\sigma,\tau\rangle \in \mathbb{N}$ 全体の集合を S とする。
  - $(\forall p \in dom(f))\,[\sigma \sqsubset p \Rightarrow \tau \sqsubset f(p)]$、且つ
  - $(\forall n \leq len(\tau))\,[\uparrow\sigma \subseteq U_n]$。

  入力 p に対し $\sigma \sqsubset p$ を満たす対 $\langle\sigma,\tau\rangle \in S$ を見つけた時に出力を τ まで拡張するように神託機械 M を定義すればよい。 □

計算可能性と連続性

Corollary

任意の部分連続関数 $f :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ を神託 Type-2 チューリング機械が計算できる部分連続関数 $f' :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ に拡張できる。

Proof: $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が (quasi-)Polish 空間であるため、f を $\mathbf{\Pi}^0_2$ の定義域を持つ部分連続関数 f' に拡張できる。 □

Table of Contents

2 Type-2 チューリング機械

3 表現付き空間と実現（計算）可能関数
- 表現付き空間
- 実現可能性と計算可能性
- 直和空間
- 直積空間
- 関数空間
- 単純型付きラムダ計算

4 第二可算空間
- 計算可能距離空間
- 計算可能位相空間
- Quasi-Polish 空間

このセクションの主な参考文献：[23], [2], [17], [16], [20]

Table of Contents

3. 表現付き空間と実現（計算）可能関数
    - 表現付き空間
    - 実現可能性と計算可能性
    - 直和空間
    - 直積空間
    - 関数空間
    - 単純型付きラムダ計算

表現付き空間 (Represented spaces)

Definition

集合 X と全射の部分関数 $\rho_X :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$ の対 (X, ρ_X) を 表現付き空間という。

- ρ_X を X の表現という。
- ρ_X の定義域を $dom(\rho)$ と書く。
- $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ と $x \in X$ に対し $\rho_X(p) = x$ が成り立つとき、p を x の ρ_X-名前または単に名前という。
- (X, ρ_X) を X と略することもある。

表現付き空間の例

- $\mathbf{0} := (\emptyset, \emptyset)$　（$\mathbf{0}$ の表現の定義域は空集合である）
- $\mathbf{1} := (\{0\}, \lambda p.0)$
- $\mathbf{2} := (\{0,1\}, \lambda p.\textbf{if } p(0) > 0 \textbf{ then } 1 \textbf{ else } 0)$
- $\mathbb{S} := (\{\bot, \top\}, \lambda p.\textbf{if } (\exists n)\, p(n) > 0 \textbf{ then } \top \textbf{ else } \bot)$
- $\mathbb{S}_{\boldsymbol{\Sigma}^0_2} :=$ $(\{\bot, \top\}, \lambda p.\textbf{if } (\exists n_0)(\forall n \geq n_0)\, p(n) > 0 \textbf{ then } \top \textbf{ else } \bot)$
- $\mathbb{N} := (\mathbb{N}, \lambda p.p(0))$
- $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} := (\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \lambda p.p)$
- $\mathbb{R} := (\mathbb{R}, \rho_{\mathbb{R}})$　（$\rho_{\mathbb{R}}$ はコーシー表現である）
- $\mathcal{P}(\mathbb{N}) := (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \lambda p.\{n \mid (\exists m).p(m) = n+1\})$

3 表現付き空間と実現（計算）可能関数
- 表現付き空間
- 実現可能性と計算可能性
- 直和空間
- 直積空間
- 関数空間
- 単純型付きラムダ計算

実現可能関数 (Realizable functions)

Definition

(X, ρ_X) と (Y, ρ_Y) を表現付き空間とする。集合論的な関数 $f\colon X \to Y$ が実現可能であるとは、

$$q \in dom(\rho_X) \Rightarrow f(\rho_X(q)) = \rho_Y(F(q))$$

を満たす連続関数 $F :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が存在することである。

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\rho_X"'] & \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \arrow[d, "\rho_Y"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

(注: $dom(F) \supsetneq dom(\rho_X)$ という場合もある。)

- つまり、F は任意の $x \in X$ の任意の ρ_X-名前を $f(x) \in Y$ の ρ_Y-名前に変換する。
- F は f を実現するという。

計算可能関数 (Computable functions)

Definition

(X, ρ_X) と (Y, ρ_Y) を表現付き空間とし、$f\colon X \to Y$ を実現可能関数とする。f を実現する計算可能な $F :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が存在するとき、*f が計算可能である*という。

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \arrow[r, "F\ (\text{計算可能})"] \arrow[d, "\rho_X"'] & \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \arrow[d, "\rho_Y"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

多価関数 (Multi-valued functions)

- 集合 X から集合 Y の冪集合 $\mathcal{P}(Y)$ への関数 $f\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ を多価関数と呼び、$f\colon X \rightrightarrows Y$ と表す。
  - 例：$\sqrt{(\cdot)}\colon \mathbb{C} \rightrightarrows \mathbb{C}$ は多価関数である。
- 濃度の問題で一般の表現付き空間の冪集合を表現できないが、多価関数の実現（計算）可能性を次のように定義できる。

Definition

(X, ρ_X) と (Y, ρ_Y) を表現付き空間とする。集合論的な多価関係 $f\colon X \rightrightarrows Y$ が実現 (計算) 可能であるとは、

$$q \in dom(\rho_X) \Rightarrow \rho_Y(F(q)) \in f(\rho_X(q))$$

を満たす連続 (計算可能な) 関数 $F :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が存在することである。

注: 多価関係 $f\colon X \rightrightarrows Y$ と $x \in X$ に対し、形式的に $f(x)$ の値は集合として定義されているが、本講義では便宜のため $f(x)$ を非決定的単価関数の値として扱い、「$f(x) > 0$」を書いたりする。

3. 表現付き空間と実現（計算）可能関数
- 表現付き空間
- 実現可能性と計算可能性
- 直和空間
- 直積空間
- 関数空間
- 単純型付きラムダ計算

直和空間 (Coproduct space)

集合 X と Y の集合論的直和を
$X+Y=\{\langle x,0\rangle \mid x\in X\}\cup\{\langle y,1\rangle \mid y\in Y\}$ と定義する。

Definition

表現付き空間 (X,ρ_X) と (Y,ρ_Y) の直和空間 $(X+Y,\rho_{X+Y})$ を $\rho_{X+Y} :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X+Y$、

$$\rho_{X+Y}(p)=\begin{cases}\langle \rho_X(\lambda n.p(n+1)),0\rangle & p(0)=0 \text{ のとき}\\ \langle \rho_Y(\lambda n.p(n+1)),1\rangle & p(0)\neq 0 \text{ のとき}\end{cases}$$

として定義する。入射関数 $\iota_0\colon X\to X+Y$ と $\iota_1\colon Y\to X+Y$ を $\iota_0(x)=\langle x,0\rangle$、$\iota_1(y)=\langle y,1\rangle$ と定義する。

- 空の直和を $\mathbf{0}$ と定義する。任意の表現付き空間 X に対し、空間数は $\mathbf{0}$ から X への唯一の関数である。
- 従って、任意の有限個の表現付き空間に対し、その直和空間が存在する。
  - 可算個の表現付き空間の直和も存在するが、詳細は省略する。

直和空間 (Coproduct space)

Lemma

入射関数 $\iota_0 \colon X \to X + Y$ と $\iota_1 \colon Y \to X + Y$ は計算可能である。

Proof:

- $F_0 \colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ を

$$F_0(p) = \lambda n.\textbf{if } n = 0 \textbf{ then } 0 \textbf{ else } p(n-1)$$

  と定義する。$F_0(p)$ は出力テープに 0 を書き込んでから p をコピーするだけで計算できる。また、$p \in dom(\rho_X)$ に対し

$$\begin{aligned} \rho_{X+Y}(F_0(p)) &= \langle \rho_X(\lambda n.F_0(p)(n+1)), 0\rangle \\ &= \langle \rho_X(\lambda n.p(n)), 0\rangle \\ &= \langle \rho_X(p), 0\rangle \\ &= \iota_0(\rho_X(p)) \end{aligned}$$

  が成り立つため、F_0 は ι_0 を実現する。
- 同様に、$F_1 = \lambda p.\lambda n.\textbf{if } n = 0 \textbf{ then } 1 \textbf{ else } p(n-1)$ は計算可能であり、ι_1 を実現する。 □

直和空間 (Coproduct space)

直和空間は圏論的な意味での直和である。

Theorem

任意の表現付き空間 A と実現（計算）可能関数 $f\colon X \to A$ と $g\colon Y \to A$ に対し $f = (f,g) \circ \iota_0$ かつ $g = (f,g) \circ \iota_1$ を満たす実現（計算）可能関数 $(f,g)\colon X + Y \to A$ がちょうど一つ存在する。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota_0"] \arrow[dr, "f"'] & X + Y \arrow[d, "{(f,g)}"] & Y \arrow[l, "\iota_1"'] \arrow[dl, "g"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Proof: (f,g) は $(f,g)(\iota_0(x)) = f(x)$ かつ $(f,g)(\iota_1(y)) = g(y)$ として一意に決まる。$F, G :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ がそれぞれ f と g を実現するとき、

$$H(p) = \begin{cases} F(\lambda n.p(n+1)) & p(0) = 0 \text{ のとき} \\ G(\lambda n.p(n+1)) & p(0) \neq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義すれば、$p \in dom(\rho_{X+Y})$ に対し $\rho_A(H(p)) = (f,g)(\rho_{X+Y}(p))$ が成り立つため、(f,g) は実現（計算）可能である。 □

Table of Contents

3. 表現付き空間と実現（計算）可能関数
   - 表現付き空間
   - 実現可能性と計算可能性
   - 直和空間
   - 直積空間
   - 関数空間
   - 単純型付きラムダ計算

対関数と射影関数

Definition

対関数 $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ と射影関数 $\pi_0, \pi_1\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ を次のように定義する。

$$
\begin{array}{rcl}
\langle p, q\rangle & := & \lambda n. \begin{cases} p(\frac{n}{2}) & n\text{ が偶数のとき} \\ q(\frac{(n-1)}{2}) & n\text{ が奇数のとき} \end{cases} \\
\pi_0(p) & := & \lambda n.p(2n) \\
\pi_1(p) & := & \lambda n.p(2n+1)
\end{array}
$$

$\pi_0(\langle p, q\rangle) = p$ と $\pi_1(\langle p, q\rangle) = q$ が成り立つ。

例:

$$
\begin{array}{rcl}
\langle 000\cdots, 111\cdots\rangle & = & 010101\cdots \\
\pi_0(010101\cdots) & = & 000\cdots \\
\pi_1(010101\cdots) & = & 111\cdots
\end{array}
$$

直積空間 (Product space)

集合 X と Y の集合論的直積を $X \times Y = \{\langle x, y\rangle \mid x \in X \,\&\, y \in Y\}$ と定義する。

Definition

表現付き空間 (X, ρ_X) と (Y, ρ_Y) の直積空間 $(X \times Y, \rho_{X\times Y})$ を $\rho_{X\times Y} :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X \times Y$、

$$\rho_{X\times Y}(p) = \langle x, y\rangle \iff \rho_X(\pi_0(p)) = x \,\&\, \rho_Y(\pi_1(p)) = y.$$

として定義する。射影関数 $\pi_0 \colon X \times Y \to X$ と $\pi_1 \colon X \times Y \to Y$ を $\pi_0(\langle x, y\rangle) = x$、$\pi_1(\langle x, y\rangle) = y$ と定義する。

- 演習問題：射影関数が計算可能であることを示せ。
- 空積を $\mathbf{1}$ と定義する。表現付き空間 X から $\mathbf{1}$ への唯一に存在する関数を $!_X \colon X \to \mathbf{1}$ と表す。
- 従って、任意の有限個の表現付き空間に対し、その直積空間が存在する。
  - 可算個の表現付き空間の直積も存在するが、詳細は省略する。

直積空間 (Product space)

直積空間は圏論的な意味での直積である。

Theorem

任意の表現付き空間 A と実現（計算）可能関数 $f\colon A \to X$ と $g\colon A \to Y$ に対し $f = \pi_0 \circ \langle f, g\rangle$ かつ $g = \pi_1 \circ \langle f, g\rangle$ を満たす実現（計算）可能関数 $\langle f, g\rangle\colon A \to X \times Y$ がちょうど一つ存在する。

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\langle f,g\rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & X \times Y \arrow[l, "\pi_0"] \arrow[r, "\pi_1"'] & Y \end{tikzcd}$$

Proof: 演習問題

Table of Contents

3. 表現付き空間と実現（計算）可能関数
    - 表現付き空間
    - 実現可能性と計算可能性
    - 直和空間
    - 直積空間
    - 関数空間
    - 単純型付きラムダ計算

- τ が σ の接頭辞であることを $\tau \sqsubseteq \sigma$ と表す。真の接頭辞の場合は $\tau \sqsubset \sigma$ と書くこともある。
- $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を計算可能な全単射とする。

Definition

各 $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ に対し, 部分連続関数 $\bar{\eta}(p) :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ を

$$\begin{aligned}&\bar{\eta}(p)(q)(n) = m \iff \\ &(\exists \sigma \sqsubset q)\left[p(\langle\sigma, n\rangle) = m + 1 \,\&\, (\forall \tau \sqsubset \sigma)\, p(\langle\tau, n\rangle) = 0\right]\end{aligned}$$

と定義する。

- $(\forall \tau \sqsubset \sigma)\, p(\langle\tau, n\rangle) = 0$ の条件は $\bar{\eta}(p)(q)(n)$ の値が一意に決まるように必要である。
- $q \in dom(\bar{\eta}(p)) \iff (\forall n)\, [\bar{\eta}(p)(q)(n)$が定義されている$]$。
- 評価関数 $\langle p, q\rangle \mapsto \bar{\eta}(p)(q)$ は計算可能である。

Lemma

任意の部分連続 (計算可能) 関数 $g :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ に対し、$(\forall p, q \in dom(g))\, \bar{\eta}(s(p))(q) = g(p, q)$ を満たす全域連続（計算可能）関数 $s : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が存在する。

Proof:

- g を計算する（神託）チューリング機械 M を固定する。
- $M(p, \sigma 0^{\mathbb{N}})$ が $len(\sigma)$ 計算ステップ以内に出力テープの n 番目のマスに m を出力する場合に $s(p)(\langle \sigma, n\rangle) = m + 1$ と定義し、そうでない場合に $s(p)(\langle \sigma, n\rangle) = 0$ と定義する。
    - $len(\sigma)$ 計算ステップ以内に M の読み込みヘッドが入力 $\sigma 0^{\mathbb{N}}$ の $0^{\mathbb{N}}$ の部分まで移動できないことに注意。
- 任意の $p, q \in dom(g)$ に対し、$\bar{\eta}(s(p))(q)(n) = m$

$$
\begin{aligned}
&\iff (\exists \sigma \sqsubset q)\, s(p)(\langle \sigma, n\rangle) = m + 1 \\
&\iff M(p, q) \text{が } n \text{ 番目のマスに } m \text{ を出力} \\
&\iff g(p, q)(n) = m.
\end{aligned}
$$

関数空間 (Function space)

Definition

表現付き空間 (X,ρ_X) と (Y,ρ_Y) の関数空間 (Y^X,ρ_{Y^X}) を次のように定義する。

- Y^X は X から Y への実現可能関数全体の集合である。
- $\rho_{Y^X} :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to Y^X$ は

$$\rho_{Y^X}(p) = f \iff \bar{\eta}(p)\text{が } f \text{ を実現する}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\bar{\eta}(p)} & \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \\ \rho_X \downarrow & & \downarrow \rho_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

と定義される。

関数空間の例：$\mathbb{S}^X$

- 表現付き空間 (X, ρ_X) と $\mathbb{S} := (\{\bot, \top\}, \rho_{\mathbb{S}})$ の関数空間 $\mathbb{S}^X$ について考える。
  - $\rho_{\mathbb{S}} = \lambda p.\textbf{if } (\exists n)\, p(n) > 0 \textbf{ then } \top \textbf{ else } \bot$
- $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ と $\varphi\colon X \to \mathbb{S}$ に対し $\bar{\eta}(p)$ が φ を実現する必要十分条件は

$$(\forall q \in dom(\rho_X))\,[\varphi(\rho_X(q)) = \rho_{\mathbb{S}}(\bar{\eta}(p)(q))]$$

  である。そして $q \in dom(\rho_X)$ ならば

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbb{S}}(\bar{\eta}(p)(q)) = \top \quad &\Longleftrightarrow \quad (\exists n)\bar{\eta}(p)(q)(n) > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (\exists n)(\exists \sigma \sqsubset q)\,[p(\langle \sigma, n \rangle) > 1] \end{aligned}$$

  となる。
- 従って、$\rho_{\mathbb{S}^X}(p) = \varphi$ の必要十分条件は、任意の $x \in X$ に対し

$$\varphi(x) = \top \iff (\exists \langle \sigma, n \rangle)\,[x \in \rho_X(\uparrow\sigma) \wedge p(\langle \sigma, n \rangle) > 1]$$

  が成り立つことである。

関数空間 (Function space)

Theorem

1. $\langle f, x\rangle \mapsto f(x)$ と定義される評価関数 $\varepsilon : Y^X \times X \to Y$ は計算可能である。
2. $f\colon A \times X \to Y$ が実現（計算）可能ならば $a \mapsto \lambda x.f(a, x)$ と定義される関数 $\lambda f\colon A \to Y^X$ は実現（計算）可能である。

Proof:

1. $E\colon \langle p, q\rangle \mapsto \bar{\eta}(p)(q)$ が $\varepsilon : Y^X \times X \to Y$ を実現することを次のように示せる。

$$
\begin{aligned}
\rho_Y(E(\langle p, q\rangle)) &= \rho_Y(\bar{\eta}(p)(q)) \\
&= \rho_{Y^X}(p)(\rho_X(q)) \\
&= \varepsilon(\langle \rho_{Y^X}(p), \rho_X(q)\rangle) \\
&= \varepsilon(\langle \rho_{Y^X \times X}(\langle p, q\rangle)).
\end{aligned}
$$

Proof (続き):

2. F が $f\colon A \times X \to Y$ を実現するとき、前の Lemma より $\bar{\eta}(s(p))(q) = F(p, q)$ を満たす全域連続 $s : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が存在するが、この s が $\lambda f\colon A \to Y^X$ を実現することを示す。
   $p \in dom(\rho_A)$ のとき、任意の $q \in dom(\rho_X)$ に対し

$$\begin{aligned}\lambda f(\rho_A(p))(\rho_X(q)) &= f(\rho_A(p), \rho_X(q)) \\ &= \rho_Y(F(p, q)) \\ &= \rho_Y(\bar{\eta}(s(p))(q))\end{aligned}$$

   より、$\bar{\eta}(s(p))$ が $\lambda f(\rho_A(p))$ を実現する。従って、$\rho_{Y^X}(s(p)) = \lambda f(\rho_A(p))$ が成り立つ。$p \in dom(\rho_A)$ が任意であったため、s が λf を実現する。

$\square$

関数空間は圏論的な意味での指数対象である。

Theorem

任意の表現付き空間 A と実現（計算）可能関数 $f\colon A \times X \to Y$ に対し $\lambda f\colon A \to Y^X$ は $f = \varepsilon \circ (\lambda f \times 1_X)$ を満たす唯一の実現（計算）可能関数である。

$$
\begin{array}{ccc}
Y^X \\
\Big\uparrow{\scriptstyle \lambda f} \\
A
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
Y^X \times X \arrow[r, "\varepsilon"] & Y \\
A \times X \arrow[u, "\lambda f \times 1_X"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

注：$1_X\colon X \to X$ は X 上の恒等関数 $1_X = \lambda x.x$ である。
$f \times g\colon A \times B \to X \times Y$ は $(f \times g)(\langle a, b\rangle) = \langle f(a), g(b)\rangle$ と定義される。

Table of Contents

3 表現付き空間と実現（計算）可能関数
- 表現付き空間
- 実現可能性と計算可能性
- 直和空間
- 直積空間
- 関数空間
- 単純型付きラムダ計算

- 表現付き空間と実現（計算）可能関数はデカルト閉圏 (cartesian closed category) であるため、単純型付きラムダ計算 (simply typed lambda calculus) の項を表現付き空間の間の実現（計算）可能関数として解釈できる。
  - 便宜のために直積型も導入するが、ここで他の型を扱わない。
  - 今後、$f(\langle x, y\rangle)$ を $f(x, y)$ と省略する。
- 次のスライドの型付け規則を用いて文脈のある型付きラムダ項 $\Gamma \vdash e : X$ を導出できる。
  - 文脈 (context)Γ は変数と型の対 $x : X$ からなる有限列である。空であるときは省略する。
  - $\Gamma \vdash e : X$ は「文脈 Γ におけるラムダ項 e の型は X である」の判断である。

単純型付きラムダ計算（+直積）

型付け規則:

$$\frac{(x \text{ が } X \text{ の変数である})}{\Gamma, x : X, \Delta \vdash x : X} \ (1) \qquad \frac{(c \text{ が } X \text{ の定数である})}{\Gamma \vdash c : X} \ (2)$$

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : X \qquad \Gamma \vdash e_2 : Y}{\Gamma \vdash \langle e_1, e_2 \rangle : X \times Y} \ (3)$$

$$\frac{\Gamma \vdash e : X \times Y}{\Gamma \vdash \pi_0(e) : X} \ (4) \qquad \frac{\Gamma \vdash e : X \times Y}{\Gamma \vdash \pi_1(e) : Y} \ (5)$$

$$\frac{\Gamma, x : X \vdash e : Y}{\Gamma \vdash (\lambda x : X.e) : Y^X} \ (6) \qquad \frac{\Gamma \vdash e_1 : Y^X \qquad \Gamma \vdash e_2 : X}{\Gamma \vdash e_1(e_2) : Y} \ (7)$$

型付きラムダ項の実現可能関数としての解釈:

- 各型 X を定められた表現付き空間 $[X]$ と解釈する。空の文脈を $[\emptyset] = \mathbf{1}$ とし、帰納的に $[\Gamma, x : X] = [\Gamma] \times [X]$ と定義する。
- 文脈 Γ を持つ型付きラムダ項 $e : X$ を次のように実現可能関数 $[\Gamma \vdash e : X] \colon [\Gamma] \to [X]$ と解釈する。
  1. $[\Gamma, x : X, \Delta \vdash x : X] := \pi_X \colon [\Gamma] \times [X] \times [\Delta] \to [X]$
  2. 定数 $c \colon \mathbf{1} \to [X]$ に対し、$[\Gamma \vdash c : X] := c \circ !_{[\Gamma]} \colon [\Gamma] \to [X]$
  3. $[\Gamma \vdash \langle e_1, e_2 \rangle : X \times Y] := \langle [\Gamma \vdash e_1 : X], [\Gamma \vdash e_2 : Y] \rangle \colon [\Gamma] \to [X] \times [Y]$
  4. $[\Gamma \vdash \pi_0(e) : X] := \pi_0 \circ [\Gamma \vdash e : X \times Y] \colon [\Gamma] \to [X]$
  5. $[\Gamma \vdash \pi_1(e) : Y] := \pi_1 \circ [\Gamma \vdash e : X \times Y] \colon [\Gamma] \to [Y]$
  6. $[\Gamma \vdash (\lambda x : X.e) : Y^X] := \lambda[\Gamma, x : X \vdash e : Y] \colon [\Gamma] \to [Y]^{[X]}$
  7. $[\Gamma \vdash e_1(e_2) : Y] := \varepsilon \circ \langle [\Gamma \vdash e_1 : Y^X], [\Gamma \vdash e_2 : X] \rangle \colon [\Gamma] \to [Y]$

  e に現れる定数が全て計算可能であれば $[\Gamma \vdash e : X]$ が計算可能である。

Definition

$f\colon X \to Y$ に対し、$\mathbb{S}^f\colon \mathbb{S}^Y \to \mathbb{S}^X$ を
$\mathbb{S}^f := \lambda\varphi : \mathbb{S}^Y.\lambda x : X.\varphi(f(x))$ と定義する。

型付けの導出 (及び解釈):

$$
\dfrac{
\dfrac{(\text{変数 } \varphi : \mathbb{S}^Y)}{\begin{array}{c}\varphi : \mathbb{S}^Y, x : X \vdash \varphi : \mathbb{S}^Y \\ \pi_0 : \mathbb{S}^Y \times X \to \mathbb{S}^Y\end{array}}\,(1)
\qquad
\dfrac{
\dfrac{(\text{定数 } f : Y^X)}{\begin{array}{c}\varphi : \mathbb{S}^Y, x : X \vdash f : Y^X \\ f\circ ! : \mathbb{S}^Y \times X \to Y^X\end{array}}\,(2)
\quad
\dfrac{(\text{変数 } x : X)}{\begin{array}{c}\varphi : \mathbb{S}^Y, x : X \vdash x : X \\ \pi_1 : \mathbb{S}^Y \times X \to X\end{array}}\,(1)
}{\begin{array}{c}\varphi : \mathbb{S}^Y, x : X \vdash f(x) : Y \\ \varepsilon \circ \langle f\circ !, \pi_1\rangle : \mathbb{S}^Y \times X \to Y\end{array}}\,(7)
}{
\dfrac{\begin{array}{c}\varphi : \mathbb{S}^Y, x : X \vdash \varphi(f(x)) : \mathbb{S} \\ \varepsilon \circ \langle \pi_0, \varepsilon \circ \langle f\circ !, \pi_1\rangle\rangle : \mathbb{S}^Y \times X \to \mathbb{S}\end{array}}{
\dfrac{\begin{array}{c}\varphi : \mathbb{S}^Y \vdash \lambda x : X.\varphi(f(x)) : \mathbb{S}^X \\ \lambda(\varepsilon \circ \langle \pi_0, \varepsilon \circ \langle f\circ !, \pi_1\rangle\rangle) : \mathbb{S}^Y \to \mathbb{S}^X\end{array}}{\begin{array}{c}\vdash \lambda\varphi : \mathbb{S}^Y.\lambda x : X.\varphi(f(x)) : (\mathbb{S}^X)^{(\mathbb{S}^Y)} \\ \lambda(\lambda(\varepsilon \circ \langle \pi_0, \varepsilon \circ \langle f\circ !, \pi_1\rangle\rangle)) : \mathbf{1} \to (\mathbb{S}^X)^{(\mathbb{S}^Y)}\end{array}}\,(6)
}\,(6)
}\,(7)
$$

応用例：連続関数の逆像

Definition

$U \subseteq X$ に対し、$x \in U \iff \chi_U(x) = \top$ を満たす実現可能 $\chi_U \colon X \to \mathbb{S}$ が存在すれば、U を X の開集合という。χ_U が計算可能であれば、U を実効的開集合という。

- 注: このとき、χ_U を U の指示関数という。
- 演習問題: $\mathbb{N}$ の実効的開集合と c.e. 部分集合が一致する。

Theorem

$f \colon X \to Y$ が計算可能であれば、Y の任意の (実効的) 開集合 $U \subseteq Y$ の逆像 $f^{-1}(U)$ は X の (実効的) 開集合である。

Proof: $\chi_U \colon Y \to \mathbb{S}$ を U の指示関数とすれば、

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(U) &\iff f(x) \in U \\ &\iff \chi_U(f(x)) = \top \\ &\iff \mathbb{S}^f(\chi_U)(x) = \top \end{aligned}$$

が成り立つため、$\mathbb{S}^f(\chi_U) \colon X \to \mathbb{S}$ は $f^{-1}(U)$ の指示関数である。 □

Table of Contents

3 表現付き空間と実現（計算）可能関数
- 表現付き空間
- 実現可能性と計算可能性
- 直和空間
- 直積空間
- 関数空間
- 単純型付きラムダ計算

4 第二可算空間
- 計算可能距離空間
- 計算可能位相空間
- Quasi-Polish 空間

5 許容的表現
- 許容的表現
- 許容的表現付き空間の基本定理
- 許容的表現を持つ空間の特徴付け
- $\mathbf{QCB}_0$ 空間

このセクションの主な参考文献：[23],[5],[11],[14],[8],[20]

Table of Contents

4. 第二可算空間
   - 計算可能距離空間
   - 計算可能位相空間
   - Quasi-Polish 空間

距離空間 (Metric space)

Definition

集合 X と関数 $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ が次の条件を満たすとき (X, d) を距離空間という。

- $d(x, y) \geq 0$
- $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

注: 今後、距離空間 (X, d) を開球 $B_r(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$ $(x \in X, r > 0)$ から生成される位相を持つ位相空間とみなす。

Definition

位相空間 X の部分集合 $D \subseteq X$ が稠密 (dense) であるとは、任意の空でない $U \in \mathbf{O}(X)$ に対し $U \cap D \neq \emptyset$ が成り立つことである。X の可算な稠密部分集合が存在するとき、X が可分 (separable) であるという。

計算可能距離空間 (Computable metric space)

Definition

可分距離空間 (X, d) と関数 $\alpha\colon \mathbb{N} \to X$ が

- $range(\alpha) = \{\alpha(i) \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ が稠密である
- $\{\langle i, j, \ell, u\rangle \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{Q}^2 \mid \ell < d(\alpha(i), \alpha(j)) < u\}$ が c.e. である

を満たすとき、(X, d, α) を計算可能距離空間という。

例:

- $(\mathbb{R}, d, \alpha)$、$d(x, y) = |x - y|$、α が $\mathbb{Q}$ への計算可能全射である。
- $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$、$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)}$、$\alpha$ が $\mathbb{Q}^n$ への計算可能全射である。
- $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, d, \alpha)$、$d(p, q) = 2^{-\min\{i \in \mathbb{N} \mid p(i) \neq q(i)\}}$ $(\min \emptyset := \infty)$、$\alpha$ が $\{\sigma 0^{\mathbb{N}} \mid \sigma \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ への計算可能全射である。

コーシー表現 (Cauchy representation)

次のように計算可能距離空間を表現付き空間とみなす。

Definition

計算可能距離空間 (X, d, α) のコーシー表現 $\rho_X :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$ を

$$
\begin{aligned}
p \in dom(\rho_X) \quad &\iff \quad (\forall i)\, d(\alpha(p(i)), \alpha(p(i+1))) < 2^{-i} \text{ かつ} \\
&\qquad\quad (\exists x_\infty \in X)\, \alpha(p(i)) \to x_\infty \\
\rho_X(p) \quad &:= \quad \lim_{i\to\infty} \alpha(p(i))
\end{aligned}
$$

と定義する。

注: 可分距離空間は計算可能ではなくても可算稠密部分集合を決めたらコーシー表現を定義できる。

Table of Contents

4. 第二可算空間
   - 計算可能距離空間
   - 計算可能位相空間
   - Quasi-Polish 空間

計算可能位相空間 (Computable topological space)

Definition

位相空間 X と関数 $\beta\colon \mathbb{N} \to \mathbf{O}(X)$ と c.e. 集合 $W \subseteq \mathbb{N}^3$ が

- $range(\beta) = \{\beta(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ が X の可算基底である
- $\beta(i) \cap \beta(j) = \bigcup_{\langle i,j,k\rangle \in W} \beta(k)$

を満たすとき、(X, β, W) を計算可能位相空間という。

注:「計算可能位相空間」の定義が定着しつつあるのでここで紹介するが、X がほぼ任意であるため「計算可能」と呼ぶのは不適切であると後ほど指摘する。

例: $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を計算可能全単射とする。

(X, d, α) が計算可能距離空間であるとき、

- $\beta(\langle i, n\rangle) = B_{2^{-n}}(\alpha(i))$,
- $\langle\langle i, n\rangle, \langle j, m\rangle, \langle k, s\rangle\rangle \in W \iff$
  $d(\alpha(i), \alpha(k)) < 2^{-n} - 2^{-s}$ かつ $d(\alpha(j), \alpha(k)) < 2^{-m} - 2^{-s}$

と定義すれば (X, β, W) が計算可能位相空間となる。

標準表現 (Standard representation)

次のように計算可能位相空間を表現付き空間とみなす。

Definition

計算可能位相空間 (X, β, W) の標準表現 $\rho_X :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$ を

$$\rho_X(p) = x \iff range(p) = \{i \in \mathbb{N} \mid x \in \beta(i)\}$$

と定義する。

注: 第二可算空間が計算可能ではなくても可算基底を決めたら標準表現を定義できる。

Table of Contents

4 第二可算空間
- 計算可能距離空間
- 計算可能位相空間
- Quasi-Polish 空間

Definition

- $\prec$ を $\mathbb{N}$ 上の推移関係とする。$I \subseteq \mathbb{N}$ が
  - $I \neq \emptyset$
  - $a \prec b \in I \Rightarrow a \in I$
  - $a, b \in I \Rightarrow (\exists c \in I)\, [a \prec c \,\&\, b \prec c]$

  を満たすとき、I を ($\prec$ の) イデアルという。
- $\prec$ のイデアル全体の集合を $\mathbf{I}(\prec)$ と表す。$\mathbf{I}(\prec)$ を開集合

$$[n]_\prec = \{I \in \mathbf{I}(\prec) \mid n \in I\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

  から生成される位相を持つ位相空間とみなす。

演習問題: $[n]_\prec$ $(n \in \mathbb{N})$ が基底であることを確認せよ。

Definition

- 位相空間 X が $\mathbb{N}$ 上の推移関係 $\prec$ のイデアル空間 $\mathbf{I}(\prec)$ と同相であるとき、X を Quasi-Polish 空間という。
- その上、$\prec$ が c.e. であり、且つ X と $\mathbf{I}(\prec)$ の同相関数が計算可能であるとき、X を実効的 Quasi-Polish 空間という。
- さらに、$E_{\prec} = \{n \in \mathbb{N} \mid [n]_{\prec} \neq \emptyset\}$ が c.e. であれば、X 実効的オーバート実効的 Quasi-Polish 空間、または計算可能 Quasi-Polish 空間という。

- Quasi-Polish 空間は完備準距離化可能第二可算空間と同値である。

  Quasi-Polish $\Longleftrightarrow$ Completely Quasi-metrizable second countable space
- Quasi-Polish 空間と実効的 Quasi-Polish 空間については [5], [6],[9],[3],[15],[11],[14], [8], [10] などを参照。

計算可能 Quasi-Polish 空間の例

$\mathbb{N}$ 以外の可算集合を扱うときは自然数として適切に符号化されていると暗黙に仮定する。

1. 例: $\mathbb{N}$ 上の等号 $=$ からなるイデアル空間 $\mathbf{I}(=)$ は離散位相を持つ $\mathbb{N}$ と同相である。
2. 例: $\mathbb{N}$ 上の不等号 $\leq$ を $\mathbf{2} = \{0,1\}$ に制限した関係を $\leq_\mathbf{2}$ とすれば、$\mathbf{I}(\leq_\mathbf{2})$ は $\mathbb{S}$ と同相である。
3. 例: $\mathbb{N}$ の有限部分集合全体を $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$ とし、$\subseteq$ をその包含関係とすれば、$\mathbf{I}(\subseteq)$ は Scott 位相を持つ $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ と同相である。
4. 例: $\mathbb{N}^{<\infty}$ 上の真の接頭辞関係を $\sqsubset$ とすれば、$\mathbf{I}(\sqsubset)$ は $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ と同相である。
5. 例: (X, d, α) を計算可能距離空間とし、

$$\langle i, n\rangle \prec_d \langle j, m\rangle \iff d(\alpha(i), \alpha(j)) < 2^{-n} - 2^{-m}$$

とすれば、$\mathbf{I}(\prec_d)$ は (X, d) の距離完備化と同相である。

基本的な結果

- 任意の第二可算空間をある quasi-Polish 空間に埋め込みできる。
- Polish 空間と距離化可能 quasi-Polish 空間は同値である。
  - 従って、$\mathbb{R}$ の部分空間 $\mathbb{Q}$ は quasi-Polish 空間ではない。
- X が quasi-Polish 空間ならば、$A \subseteq X$ が quasi-Polish であるための必要十分条件は $A \in \mathbf{\Pi}^0_2(X)$ である。
- X と Y が quasi-Polish 空間で $f\colon X \to Y$ がボレル可測関数であれば、f が連続関数になるような、X 上のより細かい quasi-Polish 位相が存在する。
- Quasi-Polish 空間の圏は可算表示を持つ Locale の圏と圏同値である。([13, 4] を参照。)
  - 従って、Stone 双対より Quasi-Polish 空間を幾何的命題論理の可算的理論とみなせる（開集合 $\approx$ 命題、点 $\approx$ モデル)。

完備計算可能位相空間

- (X, β, W) が計算可能位相空間であれば、任意の埋め込み $e\colon Y \hookrightarrow X$ に対し $\gamma(i) = e^{-1}(\beta(i))$ と定義すれば (Y, γ, W) も計算可能位相空間となる。
- 従って、計算可能位相空間 (X, β, W) の唯一の実効的なパラメータ W だけで X が一意に定まらない。
- この問題を解決するために次の概念を導入する。

Definition

$W \subseteq \mathbb{N}^3$ を c.e. 集合とする。計算可能位相空間 (X, β, W) が完備であるとは、任意の計算可能位相空間 (Y, γ, W) に対し

$$(\forall i \in \mathbb{N})\, \gamma(i) = e^{-1}(\beta(i))$$

を満たす計算可能な埋め込み $e\colon Y \hookrightarrow X$ がちょうど一つ存在することである。

注: 明らかに、完備計算可能位相空間 (X, β, W) は W だけで（計算可能同相を除いて）一意に定まる。

完備計算可能位相空間の特徴付け

Theorem

完備計算可能位相空間は実効的 quasi-Polish 空間と同値である。
具体的に、

- $\prec$ が $\mathbb{N}$ 上の c.e. 推移関係であれば、
  $W = \{\langle a, b, c\rangle \mid a \prec c \,\&\, b \prec c\}$ と定義すれば、
  $(\mathbf{I}(\prec), \lambda n.[n]_{\prec}, W)$ が完備計算可能位相空間となる。
- 逆に、 $W \subseteq \mathbb{N}^3$ が c.e. であれば、
  $(X, \lambda n.\{x \in X \mid n \in x\}, W)$ が完備計算可能位相空間となる実効的 quasi-Polish 空間 $X \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ が存在する。

Proof: [8] を参照。

「計算可能位相空間」の定義について

- 上の定理の系として、計算可能位相空間を c.e. 推移関係 $\prec$ と部分集合 $X \subseteq \mathbf{I}(\prec)$ の対 $(\prec, X)$ として定義しても、従来の定義と計算論的に同値になる。
- $X \subseteq \mathbf{I}(\prec)$ が任意であるため、「計算可能」という呼び方は誤解を招く。
    - 例えば、非同相な計算可能位相空間は $2^{2^{\aleph_0}}$ も存在するが、チューリング機械は可算個しかない。
- 一方、$\mathbf{I}(\prec)$ は c.e. 推移関係 $\prec$ だけで一意に定まり、「計算可能位相空間」と呼ぶのは相応しい。
    - $\mathbf{I}(\prec)$ の（実効的）部分空間やその性質については（実効的）記述集合論で研究されている。
- その上、Quasi-Polish 空間（特にイデアル空間としての特徴付け）は Locale 理論や Formal Topology と相性が良い ([13, 4] を参照)。
    - Quasi-Polish でない空間の場合は古典的位相空間論と Locale 理論の違いが目立つ。例えば、$(\mathbb{Q}, +)$ は $(\mathbb{R}, +)$ の部分位相群であるが、部分 Locale 群ではない。

Table of Contents

4. 第二可算空間
   - 計算可能距離空間
   - 計算可能位相空間
   - Quasi-Polish 空間
5. 許容的表現
   - 許容的表現
   - 許容的表現付き空間の基本定理
   - 許容的表現を持つ空間の特徴付け
   - $\mathbf{QCB}_0$ 空間
6. 計算可能位相空間論のトピック
   - 離散空間
   - ハウスドルフ空間
   - $\mathbb{S}^X$ の束構造
   - コンパクト集合
   - オーバート集合
   - 応用例

このセクションの主な参考文献：[23],[18],[17],[1],[20]

5. 許容的表現
   - 許容的表現
   - 許容的表現付き空間の基本定理
   - 許容的表現を持つ空間の特徴付け
   - $\mathbf{QCB}_0$ 空間

Definition (M. Schröder [18])

X を位相空間とし、$\rho_X :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$ を部分連続関数とする。任意の部分連続関数 $f :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$ に対し、$f = \rho_X \circ F$ となる部分連続関数 $F :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が必ず存在するとき、ρ_X を X の許容的表現と呼び、(X, ρ_X) を許容的表現付き空間 (admissibly represented space) という。

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \arrow[d, "\rho_X"] \\ & X \end{tikzcd}$$

演習問題:(X, ρ_X) を許容的表現付き空間とする。任意の $Y \subseteq X$ に対し、

$$\rho_Y(p) = \rho_X(p) \iff \rho_X(p) \in Y$$

と定義する $\rho_Y :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to Y$ が Y の許容的表現であることを示せ。

許容的表現の例

Theorem

$\mathbb{N}$ 上の推移関係 $\prec$ に対し、

$$\rho_{\prec}(p) = I \iff I = \{p(i) \mid i \in \mathbb{N}\} \in \mathbf{I}(\prec)$$

と定義される $\rho_{\prec} :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbf{I}(\prec)$ は $\mathbf{I}(\prec)$ の許容的表現である。

Proof: $f :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbf{I}(\prec)$ を部分連続関数とする。全単射 $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を固定する。

$$\begin{aligned}
D &= \{\langle\sigma, n\rangle \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \mid \uparrow\sigma \cap dom(f) \subseteq f^{-1}([n]_{\prec})\} \\
G(p)(\langle\sigma, n\rangle) &= \begin{cases} n+1 & \langle\sigma, n\rangle \in D \text{ かつ } \sigma \sqsubset p \text{のとき} \\ 0 & \text{そうでないとき} \end{cases} \\
F(p)(0) &= G(p)(\min\{m \mid G(p)(m) > 0\}) - 1 \\
F(p)(n+1) &= \begin{cases} G(p)(n) - 1 & G(p)(n) > 0 \text{のとき} \\ F(p)(0) & \text{そうでないとき} \end{cases}
\end{aligned}$$

と定義すれば、$f = \rho_{\prec} \circ F$ が成り立つ。 $\square$

許容的表現の例

Corollary

X が第二可算空間ならば X の許容的表現が存在する。

演習問題: $\mathbb{R}$ のコーシー表現はユークリッド位相において許容的であることをしめせ。
注: $\mathbb{S}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$ は許容的表現を持つが、第二可算ではない。

Theorem

X が第二可算空間ならば、X が quasi-Polish 空間であることと X が $dom(\rho_X) \in \mathbf{\Pi}^0_2(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ を満たす許容的表現 $\rho_X \colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$ を持つことが同値である。

演習問題: $dom(\rho_{\prec}) \in \mathbf{\Pi}^0_2(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ を示せ。
注:X が空でない quasi-Polish 空間ならば、X の全域許容的表現 $\rho_X \colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$ が存在する。

例: $\mathbb{S}^{\mathbf{I}(\prec)}$

- 関数空間 $\mathbb{S}^X$ の表現が $\rho_{\mathbb{S}^X}(p) = \varphi$ となる必要十分条件が、任意の $x \in X$ に対し、

$$\varphi(x) = \top \iff (\exists\langle\sigma, n\rangle)\,[x \in \rho_X(\uparrow\sigma) \wedge p(\langle\sigma, n\rangle) > 1]$$

  と示した。
- $X = \mathbf{I}(\prec)$ の場合 $\rho_\prec(\uparrow\sigma) = \bigcap_{k \in range(\sigma)} [k]_\prec$ が開集合であるため、$[\sigma]_\prec := \bigcap_{k \in range(\sigma)} [k]_\prec$ とすれば、

$$\rho_{\mathbb{S}^{\mathbf{I}(\prec)}}(p) = \bigcup\{[\sigma]_\prec \mid (\exists n)\, p(\langle\sigma, n\rangle) > 1\}$$

  は常に開集合である。従って、$\rho_{\mathbb{S}^{\mathbf{I}(\prec)}}$ は全域関数である。
  - φ の $\rho_{\mathbb{S}^{\mathbf{I}(\prec)}}$-名前は φ を被覆する開基の元の列である。
- $e\colon Y \hookrightarrow \mathbf{I}(\prec)$ が部分空間の埋め込みであれば、$\rho_{\mathbb{S}^Y} = \mathbb{S}^e \circ \rho_\prec$ が許容的表現となる。従って、$\rho_{\mathbb{S}^Y}$ が全域関数であり、$\rho_{\mathbb{S}^Y}$-名前を開基の元による被覆とみなせる。

Table of Contents

5. 許容的表現
   - 許容的表現
   - 許容的表現付き空間の基本定理
   - 許容的表現を持つ空間の特徴付け
   - $\mathbf{QCB}_0$ 空間

収束点列 (Converging sequence)

Definition

位相空間 X の点列 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ と $x_\infty \in X$ が任意の $U \in \mathbf{O}(X)$

$$x_\infty \in U \Rightarrow (\exists n)(\forall i \geq n)\, x_i \in U$$

を満たすとき、$(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ が x_∞ に収束する、または x_∞ が $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ の極限点であるといい、$x_i \to x$ と書く。

- $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall i \geq n)\,[\cdots]$ を $(\forall_i^\infty)\,[\cdots]$ と省略する。
- 例: $\mathbb{R}$ の点列 $(\frac{1}{i+1})_{i\in\mathbb{N}}$ が 0 に収束する。
- 例: $\mathbb{S}$ の任意の点列が $\perp$ に収束する。
- 例: $\mathbb{S}$ の点列 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ が $\top$ に収束するための必要十分条件は $(\forall_i^\infty)\, x_i = \top$ が成り立つことである。
  - 従って、非ハウスドルフ空間内の点列が複数の点に収束することがある。

点列連続関数 (Sequentially continuous functions)

Definition

X と Y を位相空間とする。関数 $f\colon X \to Y$ が、X の任意の収束点列 $x_i \to x_\infty$ に対し $f(x_i) \to f(x_\infty)$ が成り立つとき、f を点列連続という。

- 演習問題: 連続関数は点列連続であることを示せ。

Lemma

X が第二可算であるとき、$f\colon X \to Y$ が点列連続ならば f が連続である。

Proof: f が連続ではないとすると、$f^{-1}(U) \notin \mathbf{O}(X)$ となる $U \in \mathbf{O}(Y)$ が存在する。よって、x の任意の近傍が $f^{-1}(U)$ に含まれない $x \in f^{-1}(U)$ が存在する。$(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ を x の可算近傍基とし、$x_i \in \left(\bigcap_{k\leq i} B_k\right) \setminus f^{-1}(U)$ を選べば、$x_i \to x$ かつ $f(x_i) \not\to f(x)$ となるため、f が点列連続ではない。 □

許容的表現付き空間の基本定理 (1)

Theorem

(X, ρ_X) と (Y, ρ_Y) を許容的表現付き空間とする。集合論的な関数 $f\colon X \to Y$ が実現可能となるための必要十分条件は、f が点列連続であることである。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{F} & \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \\ {\scriptstyle \rho_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_Y} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Proof:

- f が点列連続ならば $f \circ \rho_X :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to Y$ が連続となるため、ρ_Y の許容性より $f \circ \rho_X = \rho_Y \circ F$ となる部分連続関数 F が存在する。
- F が f を実現するとし、$x_i \to x_\infty$ を X の収束点列とする。$g(1^i 0^{\mathbb{N}}) = x_i$, $g(1^{\mathbb{N}}) = x_\infty$ と定義される $g :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$ が連続であるため、ρ_X の許容性より $g = \rho_X \circ G$ を満たす連続 $G :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が存在する。連続性より $\rho_Y(F(G(1^i 0^{\mathbb{N}})))$ が $\rho_Y(F(G(1^{\mathbb{N}})))$ に収束する。そして、

$$\rho_Y(F(G(1^i 0^{\mathbb{N}}))) = f(\rho_X(G(1^i 0^{\mathbb{N}}))) = f(g(1^i 0^{\mathbb{N}})) = f(x_i)$$

より、$f(x_i) \to f(x_\infty)$ が成り立つ。 □

列型空間 (Sequential spaces)

Definition

X を位相空間とし、$U \subseteq X$ とする。任意の収束点列 $x_i \to x_\infty \in U$ に対し $(\forall_i^\infty)\, x_i \in U$ が成り立つとき、U を列開集合 (sequentially open set) という。

開集合は明らかに列開集合である。

Definition

X の全ての列開集合が開集合であるとき X を列型空間という。

演習問題: 第二可算空間は列型空間であることを示せ。

Lemma

X と Y を列型空間とする。$f\colon X \to Y$ が点列連続であれば f が連続である。

Proof: $U \subseteq Y$ を列開集合とする。X 内の収束点列 $x_i \to x_\infty$ が $x_\infty \in f^{-1}(U)$ を満たすとき、f の点列連続性より $f(x_i) \to f(x_\infty) \in U$ となるため、$(\forall_i^\infty)\, x_i \in f^{-1}(U)$ が成り立つ。従って、$f^{-1}(U)$ は列開集合である。 $\square$

許容的表現付き空間の基本定理 (2)

列型空間では点列連続性と連続性が一致するため、次が成り立つ。

Theorem

(X, ρ_X) と (Y, ρ_Y) を許容的表現付き列型空間とする。集合論的な関数 $f\colon X \to Y$ が実現可能となるための必要十分条件は、f が連続であることである。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{F} & \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \\ {\scriptstyle \rho_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_Y} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Table of Contents

5. 許容的表現
   - 許容的表現
   - 許容的表現付き空間の基本定理
   - 許容的表現を持つ空間の特徴付け
   - $\mathbf{QCB}_0$ 空間

許容的表現を持つ空間の特徴付け

Definition

$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ を位相空間 X の部分集合の集合とする。任意の $U \in \mathbf{O}(X)$ と $x_\infty \in U$ に収束する点列 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ に対し、

$$x_\infty \in B \subseteq U \text{ かつ } (\forall_i^\infty)\, x_n \in B$$

を満たす $B \in \mathcal{B}$ が必ず存在するとき、$\mathcal{B}$ を X の擬基底 (pseudobase) という。さらに、$\mathcal{B}$ が可算集合であれば、$\mathcal{B}$ を X の可算擬基底 (countable pseudobase) という。

注: 基底は明らかに擬基底である。

Theorem

位相空間 X が許容的表現を持つための必要十分条件は X が可算擬基底を持つことである。

Proof: (X, ρ_X) が許容的表現付き空間ならば、$\mathcal{B} := \{\rho_X(\uparrow\sigma) \mid \sigma \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ が X の可算擬基底となる。逆の証明については [18] を参照。 □

Lemma

$X \times Y$ 上の直積位相では、$\langle x_i, y_i \rangle \to \langle x_\infty, y_\infty \rangle$ となる必要十分条件は $x_i \to x_\infty$ かつ $y_i \to y_\infty$ が成り立つことである。

Proof: 演習問題

Theorem

(X, ρ_X) と (Y, ρ_Y) を許容的表現付き空間ばらば、
$(X \times Y, \rho_{X\times Y})$ は直積位相において許容的表現付き空間である。

Proof: $dom(\rho_{X\times Y})$ 内の収束点列 $p_i \to p_\infty$ に対し、ρ_X と ρ_Y と射影関数の連続性より $\rho_X(\pi_0(p_i)) \to \rho_X(\pi_0(p_\infty))$ かつ $\rho_Y(\pi_1(p_i)) \to \rho_Y(\pi_1(p_\infty))$ となるため、上記の Lemma と $\rho_{X\times Y}$ の定義より $\rho_{X\times Y}(p_i) \to \rho_{X\times Y}(p_\infty)$ となる。従って、$\rho_{X\times Y}$ は連続である。

次に、$f :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X \times Y$ が連続であれば、ρ_X と ρ_Y の許容性より $\pi_0 \circ f = \rho_X \circ F_0$ かつ $\pi_1 \circ f = \rho_X \circ F_1$ を満たす連続 $F_0, F_1 :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が存在する。$F(p) = \langle F_0(p), F_1(p) \rangle$ と定義すれば、$f = \rho_{X\times Y} \circ F$ が成り立つ。従って、$\rho_{X\times Y}$ は許容的表現である。 □

収束列開位相 (convergent sequence - open topology)

Definition

X の収束点列 $x_i \to x_\infty$ と $U \in \mathbf{O}(Y)$ に対し、

$$[(x_i)_{i\leq\infty}; U] = \{f \in Y^X \mid (\forall i \leq \infty)\, f(x_i) \in U\}$$

と定義する。Y^X 上に $[(x_i)_{i\leq\infty}; U]$ （$x_i \to x_\infty$、$U \in \mathbf{O}(Y)$）の開集合から生成される位相を収束列開位相という。

収束列開位相

Lemma

Y^X 上の収束列位相では、$f_i \to f_\infty$ となる必要十分条件は、X の任意の収束点列 $x_i \to x_\infty$ に対し $f_i(x_i) \to f_\infty(x_\infty)$ が成り立つことである。

Proof:

- $f_i \to f_\infty$ かつ $x_i \to x_\infty$ とし、$f_\infty(x_\infty) \in U \in \mathbf{O}(Y)$ とする。
$(\forall_i^\infty)\, f_\infty(x_i) \in U$ であるため、ある $n \in \mathbb{N}$ に対し
$f_\infty \in [(x_i)_{n \le i \le \infty}; U]$ となり、$(\forall_i^\infty)\, f_i \in [(x_i)_{n \le i \le \infty}; U]$ が成り立つ。従って、$(\forall_i^\infty)\, f_i(x_i) \in U$ が成り立つ。U が任意であったため $f_i(x_i) \to f_\infty(x_\infty)$ が示された。
- 逆に、「$x_i \to x_\infty$ ならば $f_i(x_i) \to f_\infty(x_\infty)$」が成り立つと仮定し、$f_\infty \in [(z_i)_{i \le \infty}; U]$ とする。$f_i(z_\infty) \to f_\infty(z_\infty) \in U$ が成り立つため、一般性を失わずに $(\forall i)\, f_i(z_\infty) \in U$ と仮定してよい。従って、$(\forall_k^\infty)\, f_i(z_k) \in U$ となり、$g(i) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid f_i(z_k) \notin U\}$ $(\max \emptyset := 0)$ として $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を定義できる。

Proof (続き):

- g の値域 $range(g)$ が無限であれば、$g(h(n)) < g(h(n+1))$ を満たす真に増加する $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在するが、

$$y_i := \begin{cases} z_{g(i)} & i \in range(h) \text{ のとき} \\ z_\infty & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

  と定義すれば、$y_i \to z_\infty \in U$ であるが $(\exists_i^\infty)\, f_i(y_i) \notin U$ より矛盾となる。

- 従って、g の値域は有限である。$m := \max(range(g)) + 1$ とする。$k \geq m$ ならば $(\forall i \in \mathbb{N})\, [f_i(z_k) \in U]$ が成り立つ。また、$k \leq m$ に対し $f_i(z_k) \to f_\infty(z_k) \in U$ より $(\forall i \geq n_k)\, f_i(z_k) \in U$ となる $n_k \in \mathbb{N}$ が存在する。$n := \max\{n_k \mid k \leq m\} + 1$ とすれば、$(\forall i \geq n)(\forall k \in \mathbb{N})\, f_i(z_k) \in U$ となり、$(\forall_i^\infty)\, f_i \in [(z_i)_{i\leq\infty}; U]$ が成り立つ。 □

Theorem

(X, ρ_X) と (Y, ρ_Y) を許容的表現付き空間ばらば、(Y^X, ρ_{Y^X}) は収束列開位相において許容的表現付き空間である。

Proof: $p_i \to p_\infty$ を $dom(\rho_{Y^X})$ 内の収束点列とし、X 内の収束点列 $x_i \to x_\infty$ を固定する。許容的表現付き空間の基本定理の証明のように、$\rho_X(q_i) = x_i$ $(i \leq \infty)$ を満たす収束点列 $q_i \to q_\infty$ が存在する。$\bar{\eta}$ の連続性より $\bar{\eta}(p_i)(q_i) \to \bar{\eta}(p_\infty)(q_\infty)$ となる。よって、$\rho_{X\times Y}$ の定義と ρ_Y の連続性より $f_i(x_i) \to f_\infty(x_\infty)$ が成り立つ。従って、$\rho_{X\times Y}$ は連続である。

次に、$g :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to Y^X$ が連続であるとする。$A = dom(g)$ とすれば、$h \colon A \times X \to Y$、$\langle a, x\rangle \mapsto g(a)(x)$ が連続となる（演習問題:h の点列連続性を確認せよ）。ρ_Y の許容性より $\rho_Y(H(a,p)) = h(a, \rho_X(p))$ $(a \in A, p \in dom(\rho_X))$ を満たす連続 $H :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が存在する。よって、$\bar{\eta}(s(a))(p) = H(a,p)$ を満たす全域連続 $s \colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が存在する。$p \in dom\rho_X$ に対し

$$\rho_Y(\bar{\eta}(s(a))(p)) = \rho_Y(H(a,p)) = h(a, \rho_X(p)) = g(a)(\rho_X(p))$$

より、$\rho_{Y^X}(s(a)) = g(a)$ となる。従って、ρ_{Y^X} は許容的表現である。 □

Table of Contents

5 許容的表現
- 許容的表現
- 許容的表現付き空間の基本定理
- 許容的表現を持つ空間の特徴付け
- $\mathbf{QCB}_0$ 空間

列型化 (Sequentialization)

Definition

位相空間 X の列型化 $\mathbf{seq}(X)$ は次のように定義される。

- $\mathbf{seq}(X)$ は X と同じ点を持つ。
- $\mathbf{O}(\mathbf{seq}(X)) := \{U \subseteq X \mid U$ が列開集合である$\}$

演習問題: 上に定義した $\mathbf{O}(\mathbf{seq}(X))$ は位相であることを確認せよ。
演習問題: X と $\mathbf{seq}(X)$ は同じ収束関係 $x_i \to x_\infty$ を持つことを示せ。

Lemma

$\rho_X :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$ が許容的表現であれば、ρ_X を $\mathbf{seq}(X)$ の表現としてみなせば $\rho_X :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbf{seq}(X)$ が許容的表現である。

Proof: $\mathbf{seq}(X)$ から X への恒等関数は連続であり、そして X から $\mathbf{seq}(X)$ への恒等関数は点列連続である。 □

Lemma

$\rho_X :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$ が許容的表現であれば、$U \in \mathbf{seq}(X) \iff \rho_X^{-1}(U) \in \mathbf{O}(dom(\rho_X))$ が成り立つ。

Proof:

- $U \subseteq X$ が点列開集合ならば、ρ_X の連続性より $\rho_X^{-1}(U)$ も点列開集合であることを簡単に示せる。$dom(\rho_X)$ が第二可算であるため $\rho_X^{-1}(U)$ が開集合である。
- 逆に、$\rho_X^{-1}(U)$ が開集合であるとする。$x_i \to x_\infty \in U$ ならば、$g(1^i 0^{\mathbb{N}}) = x_i$, $g(1^{\mathbb{N}}) = x_\infty$ と定義される $g :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$ が連続であるため、ρ_X の許容性より $g = \rho_X \circ G$ を満たす連続 $G :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が存在する。$G(1^{\mathbb{N}}) \in \rho_X^{-1}(U)$ より $(\forall_i^\infty)\, G(1^i 0^{\mathbb{N}}) \in \rho_X^{-1}(U)$ となるため、$(\forall_i^\infty)\, x_i \in U$ が成り立つ。従って、U は点列開集合である。 □

Definition

位相空間 X が Y の商空間であるとは、$U \in \mathbf{O}(X) \iff f^{-1}(U) \in \mathbf{O}(Y)$ を満たす全射 $f\colon Y \to X$ が存在することである。

$\mathbf{QCB}_0$ 空間 (T_0 Quotient of Countably Based space)

Definition

位相空間 X が $\mathbf{QCB}_0$ 空間であるとは、X がある第二可算空間の商空間であり、かつ X が T_0 分離公理を満たすことである。

Theorem

次が同値である。

1. X が許容的表現を持つ空間の列型化である
2. X が許容的表現を持つ列型空間である
3. X が可算擬基底を持つ列型空間である
4. X が $\mathbf{QCB}_0$ 空間である

Proof: $(1 \Rightarrow 2)$ 2 つ前の Lemma より、許容的表現を持つ空間の列型化は許容的表現を持つ。$(2 \Rightarrow 1)$ は自明である。$(2 \iff 3)$ は許容的表現を持つ空間の特徴付け定理で示した。$(2 \Rightarrow 4)$ X が列型空間で $\rho_X :\subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to X$ が許容的表現ならば、前の Lemma より $X = \mathbf{seq}(X)$ が $dom(\rho_X)$ の商空間である。$(4 \Rightarrow 2)$ については [17] を参照。 □

Definition

位相空間 X の部分集合 K が点列コンパクトであるとは、K の任意の点列 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ が K 内の点に収束する部分列を含むことである。

一般にはコンパクト性と点列コンパクト性は比較不可能であるが、列型空間の場合に一致することをこれから示す。

Lemma

列型空間 X の点列 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ が収束する部分列を含まないとき、$A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} {\downarrow}x_i$ が閉集合である。

Proof: $(\forall n \in \mathbb{N})\ y_n \in A$ かつ $y_n \to y_\infty$ ならば $y_\infty \in A$ を示せばよい。$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を $f(n) = \min\{i \in \mathbb{N} \mid y_n \leq x_i\}$ とすれば、$U \in \mathbf{O}(X)$ ならば $y_n \in U \Rightarrow x_{f(n)} \in U$ より、$x_{f(n)} \to y_\infty$ となる。$(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ が収束する部分列を含まないため、$(\forall_n^\infty)\ f(n) = i$ を満たす $i \in \mathbb{N}$ が存在する。従って、$y_\infty \in {\downarrow}x_i \subseteq A$ が成り立つ。 □

Lemma

列型空間 X のコンパクト集合 K は点列コンパクトである。

Proof:

- 矛盾を導くために K の点列 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は収束する部分列を含まないと仮定する。
- $x \in K$ に対し $D_x = \{i \in \mathbb{N} \mid x \leq x_i\}$ とする。D_x が無限であれば $(x_i)_{i\in D_x} \to x$ となり、仮定と矛盾する。従って、D_x の有限性と前の Lemma より、

$$U_x := X \setminus \bigcup_{i\in D_x} {\downarrow}x_i$$

は高々有限個の x_i を含む x の開近傍である。
- K のコンパクト性より、$K \subseteq \bigcup_{x\in F} U_x$ を満たす有限 $F \subseteq K$ が存在するが、これは U_x が高々有限個の x_i しか含まないことと矛盾する。従って、$(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は収束する部分列を含む。 □

収束列開位相とコンパクト開位相

Theorem

X と Y が $\mathbf{QCB}_0$ 空間ならば、Y^X 上の収束列開位相とコンパクト開位相が一致する。

Proof:

- $x_i \to x_\infty$ ならば $\{x_i\}_{i \le \infty}$ がコンパクト集合となるため、収束列開位相はコンパクト開位相に含まれる。
- 逆に、$K \subseteq X$ をコンパクト集合とし、$U \in \mathbf{O}(X)$ とする。$[K;U]$ が開ではないとすれば、$f_\infty \in [K;U]$ かつ $(\forall i) f_i \notin [K;U]$ を満たす Y^X 内の収束点列 $f_i \to f_\infty$ が存在する。$f(x_i) \notin U$ となる $x_i \in K$ を選べば、K の点列コンパクト性より $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ は K 内に収束する部分列を含む。一般性を失わずに $x_i \to x_\infty \in K$ とする。そのとき、$f(x_\infty) \in U$ かつ $(\forall i)\, f_i(x_i) \notin U$ となるが、$f_i \to f_\infty$ と矛盾する。従って、$[K;U]$ は Y^X 上の収束列開位相の開集合である。 □

$\mathbf{QCB}_0$ 空間からなる圏

Corollary

許容的表現を持つ位相空間と実現可能関数からなる圏と、$\mathbf{QCB}_0$ 空間と連続関数からなる圏は圏同値である。

Corollary

$\mathbf{QCB}_0$ 空間と連続関数はデカルト閉圏をなす。特に、$\mathbf{QCB}_0$ 空間 X と Y に対し、$X \times Y$ の位相は直積位相の列型化であり、Y^X の位相はコンパクト開位相の列型化である。

注: さらに、$\mathbf{QCB}_0$ 空間は可算極限と可算余極限に閉じているが、詳細を省略する。

5 許容的表現
- 許容的表現
- 許容的表現付き空間の基本定理
- 許容的表現を持つ空間の特徴付け
- $\mathbf{QCB}_0$ 空間

6 計算可能位相空間論のトピック
- 離散空間
- ハウスドルフ空間
- $\mathbb{S}^X$ の束構造
- コンパクト集合
- オーバート集合
- 応用例

7 参考文献

このセクションの主な参考文献：[23], [12], [21], [22], [16], [8]

Table of Contents

6 計算可能位相空間論のトピック
- 離散空間
- ハウスドルフ空間
- $\mathbb{S}^X$ の束構造
- コンパクト集合
- オーバート集合
- 応用例

離散空間（Discrete spaces）

Definition

等号 $(=)\colon X \times X \to \mathbb{S}$ が実現（計算可能）であるとき、X を（実効的）離散空間と呼ぶ。

この定義の妥当性を確認しよう。

- X が上記の意味で離散空間であれば、各 $x \in X$ に対し $(\lambda y.x = y)\colon X \to \mathbb{S}$ は一点集合 $\{x\}$ の指示関数であるため、$\{x\}$ は開集合である。従って、X は古典的な意味で離散空間である。
- 逆に、X が $\mathbf{QCB}_0$ 空間で古典的な意味で離散ならば $X \times X$ も古典的な意味で離散空間である。従って、$(=)\colon X \times X \to \mathbb{S}$ が自明的に連続であり、X が上記の意味で離散空間である。

離散空間（Discrete spaces）

- X が離散空間であっても実効的離散になるとは限らない。
  - 例: $\rho_H : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbf{2}$ を $\rho_H(p) = 1 \iff$「$p(0)$ 番目のチューリング機械が入力 $p(0)$ に対し停止する」と定義すれば、$(\mathbf{2}, \rho_H)$ は離散空間であるが実効的離散ではない。

Lemma

X と Y が（実効的）離散空間ならば $X \times Y$ は（実効的）離散空間である。

(注:$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ のように関数空間および無限直積は離散性を保たない。)

Proof: $\langle x_0, y_0 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle :\equiv (x_0 = x_1) \wedge (y_0 = y_1)$ と定義する。 $\square$

Table of Contents

6 計算可能位相空間論のトピック
- 離散空間
- ハウスドルフ空間
- $\mathbb{S}^X$ の束構造
- コンパクト集合
- オーバート集合
- 応用例

ハウスドルフ空間 (Hausdorff spaces)

Definition

非等号 $(\neq)\colon X \times X \to \mathbb{S}$ が実現（計算可能）であるとき、X を（実効的）ハウスドルフ空間と呼ぶ。

この定義の妥当性を確認しよう。

- X が古典的な意味でハウスドルフ空間であれば、$X \times X$ の対角線が閉集合になるため $(\neq)\colon X \times X \to \mathbb{S}$ が連続となり、X は上記の意味でハウスドルフ空間である。
- 逆に、X が第二可算空間で上記の意味でハウスドルフであれば、$X \times X$ の対角線が閉集合であり、また $X \times X$ は古典的直積位相を持つため、X は古典的な意味でハウスドルフである。
- しかし、X が $\mathbf{QCB}_0$ 空間で上記の意味でハウスドルフであっても、古典的な意味でハウスドルフ空間であるとは限らない。これは $\mathbf{QCB}_0$ 空間の直積位相が古典的な直積位相より細かいときに起こり得る。
  - (M. Schröder) $\mathbb{Q}$ の一点コンパクト化は上記の意味でハウスドルフであるが、古典的な意味でハウスドルフではない。

ハウスドルフ空間 (Hausdorff spaces)

- 上記の意味のハウスドルフ性は古典的な意味での点列ハウスドルフ性 (Sequential Hausdorffness、収束点列の極限点がちょうど1つあること) と一致する：
  - X が上記の意味でハウスドルフであるとし、$x_i \to x$ かつ $x_i \to y$ とすれば、$(x_i \neq x_i) \to \bot$ が成り立つため、実現可能関数の点列連続性より $(x \neq y) = \bot$、つまり、$x = y$ が成り立ち、X は点列ハウスドルフである。
  - 逆に、X を点列ハウスドルフ空間で $x_i \to x$ かつ $y_i \to y$ とする。$(x \neq y) = \bot$ ならば $(x_i \neq y_i) \to (x \neq y)$ は自明に成り立つため $(x \neq y) = \top$ と仮定してよい。矛盾を導くために $(x_i \neq y_i) \not\to \top$ と仮定する。そうであれば、$(x_i \neq y_i) = \bot$、つまり $(x_i = y_i)$、となる $i \in \mathbb{N}$ が無限個も存在しなければならない。その共通部分列を z_i とすれば、$z_i \to x$ かつ $z_i \to y$ が成り立つが、それは X の点列ハウスドルフ性と矛盾する。従って、$(\neq)$ は点列連続であるため実現可能である。
- 本講義では第二可算空間に注目するので問題は起こりませんが、M. Schröder が指摘したように一般には古典的な定義と定理とずれることがある。

ハウスドルフ空間 (Hausdorff spaces)

X が実効的離散空間であっても実効的ハウスドルフになるとは限らない。

- 例: 有限表示群は、二つの元が等しければ群の表示から導出できるので実効的離散であるが、一般に二つの元が異なることを判定できないため実効的ハウスドルフではない。

Theorem

X と Y が（実効的）ハウスドルフ空間ならば $X \times Y$ は（実効的）ハウスドルフ空間である。

Proof: $\langle x_0, y_0 \rangle \neq \langle x_1, y_1 \rangle := (x_0 \neq x_1) \vee (y_0 \neq y_1)$ と定義する。 □

Table of Contents

6. 計算可能位相空間論のトピック
   - 離散空間
   - ハウスドルフ空間
   - $\mathbb{S}^X$ の束構造
   - コンパクト集合
   - オーバート集合
   - 応用例

$\mathbb{S}^X$ の位相

シェルピンスキー空間 (Sierpinski space) $\mathbb{S} = \{\bot, \top\}$ は順序 $\bot \le \top$ における Scott-位相を持つ。

Lemma

X が $\mathbf{QCB}_0$ 空間ならば、$\mathbb{S}^X$ の位相は Scott-位相と一致する。

Proof: [19] を参照。

従って、X が $\mathbf{QCB}_0$ 空間であるとき、$\mathbb{S}^X$ は $\mathbf{O}(X)$ に Scott-位相を備えた空間と同相である。

Lemma

X が Quasi-Polish 空間ならば、$\mathbb{S}^X$ 上の Scott-位相とコンパクト開位相は一致する。

Proof: [9] を参照。

Conjecture

「任意の第二可算空間 X に対し $\mathbb{S}^X$ 上の Scott-位相とコンパクト開位相が一致するならば X が quasi-Polish 空間である」は ZF+DC と独立である。(この予想を支える結果として [7] を参照。)

$\mathbb{S}^X$ の束構造

- $\varphi \leq \psi \iff (\forall x)\,[\varphi(x) \leq \psi(s)]$ により $\mathbb{S}^X$ を半順序集合とみなせる。また、$\mathbb{S}$ の有界束構造も次のように $\mathbb{S}^X$ に拡張される。
  - $\top_{\mathbb{S}^X} := \lambda x.\top$
  - $\varphi \wedge_{\mathbb{S}^X} \psi := \lambda x.\varphi(x) \wedge \psi(x)$
  - $\bot_{\mathbb{S}^X} := \lambda x.\bot$
  - $\varphi \vee_{\mathbb{S}^X} \psi := \lambda x.\varphi(x) \vee \psi(x)$
- $e_X \colon \mathbb{S} \to \mathbb{S}^X$ を $e_X(t) = \lambda x : X.t$ と定義する。
  - つまり $e_X(\top) = \top_X$ かつ $e_X(\bot) = \bot_X$ が成り立つ。
  - 同型 $\mathbb{S} \cong \mathbb{S}^{\mathbf{1}}$ を用いれば e_X を $\mathbb{S}^{!_X} \colon \mathbb{S}^{\mathbf{1}} \to \mathbb{S}^X$ として定義することもできる。

  e_X は $\mathbb{S}$ から $\mathbb{S}^X$ への唯一の有界束準同型である。
- 注: $\mathbb{S}^X$ はフレーム構造もある。つまり、$\varphi_i \in \mathbb{S}^X$ $(i \in I)$ に対し、$\bigvee_{i \in I} \varphi_i := \lambda x.(\exists i \in I)\,[\varphi_i(x) = \top]$ が $(\varphi_i)_{i \in I}$ の結びであり、そして任意の結びと有限交わりに対する分配法則が成り立つ。古典的位相空間論と比較するときにフレーム構造が重要となるが、多くの場合は Scott 連続性より無限結びを有限結びと置き換えることができる。従って、ここでは有界束の構造に注目し、フレーム構造については最後ら辺の講義で少しだけ言及する。

$\mathbb{S}^X$ の束構造

- $f\colon X \to Y$ に対し $\mathbb{S}^f = \lambda\varphi.\lambda x.\varphi(f(x))$ と定義する。

Lemma

$f\colon X \to Y$ ならば $\mathbb{S}^f\colon \mathbb{S}^Y \to \mathbb{S}^X$ は有界束準同型である。

- Proof:
  - $\mathbb{S}^f(\top_{\mathbb{S}^Y}) = (\lambda\varphi.\lambda x.\varphi(f(x)))(\top_{\mathbb{S}^Y}) = \lambda x.\top_{\mathbb{S}^Y}(f(x)) = \lambda x.\top = \top_{\mathbb{S}^X}$
  - $\mathbb{S}^f(\varphi \wedge_{\mathbb{S}^Y} \psi) = \lambda x.(\varphi \wedge_{\mathbb{S}^Y} \psi)(f(x)) = \lambda x.\varphi(f(x)) \wedge \psi(f(x)) = \lambda x.\mathbb{S}^f(\varphi)(x) \wedge \mathbb{S}^f(\psi)(x) = \mathbb{S}^f(\varphi) \wedge_{\mathbb{S}^X} \mathbb{S}^f(\psi)$
  - 同様に $\mathbb{S}^f$ が有限結びを保つことを示せる。 $\square$
- 特に、$x\colon \mathbf{1} \to X$ ならば $\mathbb{S}^x\colon \mathbb{S}^X \to \mathbb{S}^{\mathbf{1}}$ は有界束準同型である。
  - $\mathbb{S}^x(\varphi)(0) = \top \iff \varphi(x(0)) = \top$ に注意。
- このように、$x \in X$ は有界束準同型 $\lambda\varphi.\varphi(x) \in \mathbb{S}^{\mathbb{S}^X}$ を定める。
- 逆に、X がある完備性を持っていれば、$\mathbb{S}^{\mathbb{S}^X}$ 内の有界束準同型は必ずある $x \in X$ に対応していることを次に示す。

有界束準同型

Lemma

X が quasi-Polish 空間であれば、

$$\begin{aligned} \mathbf{The}_X(\Phi) = x &\iff \Phi(\varphi) = \lambda\varphi.\varphi(x) \\ \Phi \in dom(\mathbf{The}_X) &\iff \Phi \text{ が有界束準同型である} \end{aligned}$$

と定義される関数 $\mathbf{The}_X :\subseteq \mathbb{S}^{\mathbb{S}^X} \to X$ は計算可能である。

Proof: $X \cong \mathbf{I}(\prec)$ となる $\mathbb{N}$ 上の推移関係 $\prec$ を固定し、有界束準同型 $\Phi \in \mathbb{S}^{\mathbb{S}^X}$ に対し

$$\mathbf{The}_X(\Phi) = \{n \in \mathbb{N} \mid \Phi([n]_\prec) = \top\}$$

と定義する。Φ が有限結びを保つ Scott 連続関数であるため、

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi) = \top &\iff (\exists n \in \mathbb{N})\,[[n]_\prec \subseteq \varphi \,\&\, \Phi([n]_\prec) = \top] \\ &\iff (\exists n \in \mathbb{N})\,[[n]_\prec \subseteq \varphi \,\&\, n \in \mathbf{The}_X(\Phi)] \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、$\mathbf{The}_X(\Phi) \in \mathbf{I}(\prec)$ を示せれば $(\forall \varphi \in \mathbb{S}^X)\,\Phi(\varphi) = \varphi(\mathbf{The}_X(\Phi))$ が成り立ち、Lemma の証明は完了する。

Proof (続き): 実際に $\mathbf{The}_X(\Phi) \in \mathbf{I}(\prec)$ を示す。

- $\Phi(\top_X) = \top$ より $\mathbf{The}_X(\Phi) \neq \emptyset$ が成り立つ。
- $a \prec b \Rightarrow [a]_\prec \supseteq [b]_\prec$ と Φ の単調性より $a \prec b \in \mathbf{The}_X(\Phi)$ ならば $a \in \mathbf{The}_X(\Phi)$ が成り立つ。
- $a, b \in \mathbf{The}_X(\Phi)$ とする。$S = \{c \in \mathbb{N} \mid a \prec c \,\&\, b \prec c\}$ とすれば、$[a]_\prec \cap [b]_\prec = \bigcup_{c \in S}[c]_\prec$ が成り立つ。Φ が有限交わりを保つため $\Phi(\bigcup_{c \in S}[c]_\prec) = \top$ となり、そして有限結びを保つことと Scott 連続性より $\Phi([c]_\prec) = \top$ を満たす $c \in S$ が存在する。この c は $c \in \mathbf{The}_X(\Phi)$ かつ $a \prec c \,\&\, b \prec c$ を満たす。

従って、$\mathbf{The}_X(\Phi) \in \mathbf{I}(\prec)$ が成り立つ。 □

6. 計算可能位相空間論のトピック
   - 離散空間
   - ハウスドルフ空間
   - $\mathbb{S}^X$ の束構造
   - コンパクト集合
   - オーバート集合
   - 応用例

コンパクト集合 (Compact sets)

Definition

$K \subseteq X$ に対し、$\forall_K(\varphi) = \top \iff (\forall x \in K)\,[\varphi(x) = \top]$ と定義される関数 $\forall_K \colon \mathbb{S}^X \to \mathbb{S}$ が実現可能ならば、K をコンパクトという。$\forall_K$ が計算可能ならば、K を実効的コンパクトという。

この定義の妥当性を確認しよう。

- $K \subseteq X$ が上記の意味でコンパクトであるとする。$(\varphi_i)_{i\in I}$ が K の被覆であるとする（つまり、
  $x \in K \Rightarrow (\exists i \in I)\,[\varphi_i(x) = \top]$ が成り立つ）。
  $\forall_K(\bigvee_{i\in I} \varphi_i) = \top$ となるため、Scott 連続性より
  $\forall_K(\bigvee_{i\in F} \varphi_i) = \top$ を満たす有限 $F \subseteq I$ が存在する。従って、$(\varphi_i)_{i\in F}$ は K の有限部分被覆であり、K は古典的な意味としてコンパクトである。
- 逆に、X が $\mathbf{QCB}_0$ 空間で $K \subseteq X$ が古典的な意味でコンパクトであれば、$\forall_K \colon \mathbb{S}^X \to \mathbb{S}$ が Scott 連続であるため実現可能である。

コンパクト集合 (Compact sets)

Theorem

1. $K_0 \subseteq X$ と $K_1 \subseteq Y$ が (実効的) コンパクトならば $K_0 \times K_1 \subseteq X \times Y$ は (実効的) コンパクトである。
2. $f\colon X \to Y$ が実現（計算）可能かつ $K \subseteq X$ が（実効的）コンパクトならば K の像 $f(K)$ が（実効的）コンパクトである。
3. $K \subseteq X$ が (実効的) コンパクトかつ $U \subseteq X$ が (実効的) 開集合であれば、差集合 $K \setminus U$ は (実効的) コンパクトである。
4. X が (実効的)Hausdorff かつ $K \subseteq X$ が (実効的) コンパクトであれば $X \setminus K$ は (実効的) 開集合である。

Proof:

1. $\forall_{K_0 \times K_1}(\varphi) = \forall_{K_0}(\lambda x.\forall_{K_1}(\lambda y.\varphi(x, y)))$ と定義する。
2. $\forall_{f(K)}(\varphi) = \forall_K(\lambda x.\varphi(f(x)))$ と定義する。
3. $\forall_{K\setminus U}(\varphi) = \forall_K(\lambda x.\varphi(x) \vee x \in U)$ と定義する。
4. $\chi_{X\setminus K}\colon X \to \mathbb{S}$ を $\chi_{X\setminus K}(x) = \forall_K(\lambda y.x \neq y)$ と定義する。

$\square$

コンパクト空間

X 全体が（実行的）コンパクト集合であれば、X を（実行的）コンパクト空間という。

Theorem

X が（実行的）コンパクト空間になるための必要十分条件は $e_X \colon \mathbb{S} \to \mathbb{S}^X$ が実現（計算）可能な右半随を持つことである。

Proof: $\Phi \colon \mathbb{S}^X \to \mathbb{S}$ が e_X の右半随であるとは、任意の $t \in \mathbb{S}$ と $\varphi \in \mathbb{S}^X$ に対し

$$e_X(t) \leq \varphi \iff t \leq \Phi(\varphi)$$

が成り立つことである。$\mathbb{S}^X$ 上の半順序 $\leq$ と e_X の定義より $e_X(t) \leq \varphi$ と $(\forall x \in X)\,[t \leq \varphi(x)]$ が同値であるため、上の条件を

$$(\forall x \in X)\,[t \leq \varphi(x)] \iff t \leq \Phi(\varphi)$$

と表せる。これは $t = \bot$ のときは自明に成り立つが、$t = \top$ のときは $\Phi = \forall_X$ と同値な条件である。 □

コンパクト集合と交わり半束準同型

Theorem

$K \subseteq X$ がコンパクトならば $\forall_K : \mathbb{S}^X \to \mathbb{S}$ は有限交わりを保つ。

Proof:

- $(\forall x \in K)\,[\top_{\mathbb{S}^X}(x) = \top]$ が成り立つため、$\forall_K(\top_{\mathbb{S}^X}) = \top$。
- $$\begin{aligned} \forall_K(\varphi \wedge_{\mathbb{S}^X} \psi) = \top &\iff (\forall x \in K)\,[\varphi(x) \wedge \psi(x) = \top] \\ &\iff (\forall x \in K)\,[\varphi(x) = \top \text{ 且つ } \psi(x) = \top] \\ &\iff (\forall x \in K)\,[\varphi(x) = \top] \text{ 且つ } (\forall x \in K)\,[\psi(x) = \top] \\ &\iff \forall_K(\varphi) \wedge \forall_K(\psi) = \top \end{aligned}$$

□

次に、X と K に条件を追加することで上の定理の逆も成り立つことを示す。

コンパクト飽和集合からなる冪空間

Definition

位相空間 X の上冪空間 (upper powerspace) $\mathbf{K}(X)$ は、X のコンパクト飽和集合全体の集合に

$$\Box U := \{K \in \mathbf{K}(X) \mid K \subseteq U\} \quad (U \in \mathbf{O}(X))$$

から生成される位相を備えた位相空間として定義される。

- $S \subseteq X$ が飽和であるとは $S = \bigcap\{W \in \mathbf{O}(X) \mid S \subseteq W\}$ のことである。X が T_1 空間であれば任意の $S \subseteq X$ は飽和である。

- $\mathbf{K}$ を関手 (そしてモナッド) に拡張できるが、詳細を省略する。
- X が第二可算であるとき $\mathbf{K}(X)$ も第二可算である。
- X が第二可算でない $\mathbf{QCB}_0$ 空間のとき上記の冪空間が $\mathbf{QCB}_0$ 空間であると限りませんが、列型化 (sequentialization) を取れば $\mathbf{QCB}_0$ 空間となる。

コンパクト飽和集合からなる冪空間

Theorem

X が (実効的)quasi-Polish 空間であるとし、$X \cong \mathbf{I}(\prec)$ となる $\mathbb{N}$ 上の (c.e.) 推移関係 $\prec$ を固定する。

1. $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ 上の推移関係 $\prec_U$ を

$$F \prec_U G \iff (\forall b \in G)(\exists a \in F)\ a \prec b$$

   と定義すれば、$\mathbf{K}(X) \cong \mathbf{I}(\prec_U)$ が成り立つ。従って、$\mathbf{K}(X)$ は (実効的)quasi-Polish 空間である。
2. $\mathbf{K}(X)$ と有限交わりを保つ関数全体からなる $\mathbb{S}^{\mathbb{S}^X}$ の部分空間は、埋め込み $K \mapsto \forall_K$ において実効的同型である。

Proof:

1. [8] を参照。
2. ここでは、$\Phi\colon \mathbb{S}^X \to \mathbb{S}$ が有限交わりを保つとき $\Phi = \forall_K$ となる $K \in \mathbf{K}(X)$ がちょうど一つ存在することを示すが、残りの詳細を省略する。

Proof (続き): $\Phi\colon \mathbb{S}^X \to \mathbb{S}$ が有限交わりを保つとする。

$$I = \{F \in \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}) \mid \Phi(\bigcup_{a \in F} [a]_{\prec}) = \top\}$$

と定義する。まずは $I \in \mathbf{I}(\prec_U)$ を示す。

- $\Phi(\top_X) = \top$ かつ $X = \bigcup_{a\in\mathbb{N}}[a]_{\prec}$ であるため、Φ の Scott 連続性より $\Phi(\bigcup_{a\in F}[a]_{\prec}) = \top$ を満たす $F \in \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ が存在する。従って $I \neq 0$ が成り立つ。
- $F \prec_U G$ ならば $a \prec b \Rightarrow [a]_{\prec} \supseteq [b]_{\prec}$ より $\bigcup_{a\in F}[a]_{\prec} \supseteq \bigcup_{b\in G}[b]_{\prec}$ となる。従って、Φ の単調性より $F \prec_U G \in I \Rightarrow F \in I$ が成り立つ。
- $F, G \in I$ のとき、$S = \{c \in \mathbb{N} \mid (\exists a \in F)(\exists b \in G)\, a \prec c \,\&\, b \prec c\}$ とすれば、$\bigcup_{a\in F}[a]_{\prec} \cap \bigcup_{b\in G}[b]_{\prec} = \bigcup_{c\in S}[c]_{\prec}$ が成り立つ。Φ が交わりを保つ Scott 連続関数であるため、ある有限 $H \subseteq S$ に対し $H \in I$ が成り立つが、この H は $F \prec_U H \,\&\, G \prec_U H$ を満たす。

従って、I をある $K_I \in \mathbf{K}(X)$ と同一視できる。[8] より、任意の $S \subseteq \mathbb{N}$ に対し $K_I \subseteq \bigcup_{a\in S}[a]_{\prec} \iff (\exists F \subseteq S)\, F \in I$ が成り立つため、I の定義と Φ の Scott 連続性から $\Phi = \forall_{K_I}$ を容易に導ける。 $\square$

Table of Contents

6 計算可能位相空間論のトピック
- 離散空間
- ハウスドルフ空間
- $\mathbb{S}^X$ の束構造
- コンパクト集合
- オーバート集合
- 応用例

オーバート性 (Overtness)

- 次に、コンパクト性の双対概念オーバート性を紹介する。
- 計算可能位相空間論においては重要な概念であるが、古典的位相空間論では自明になってしまうため、その分野ではコンパクト性のように注目されない。

オーバート集合 (Overt sets)

Definition

$A \subseteq X$ に対し、$\exists_A(\varphi) = \top \iff (\exists x \in A)\,[\varphi(x) = \top]$ と定義される関数 $\exists_A : \mathbb{S}^X \to \mathbb{S}$ が実現（計算）可能ならば、A を（実行的）オーバートという。

- 上の定義は $\exists_A(\varphi) = \bot \iff (\forall x \in A)\,[\varphi(x) = \bot]$ と同値である。
- $\exists_A$ は常に実現可能であるが、計算可能性は自明ではない。
  - 注: $\prec$ が c.e. 推移関係ならば、$A \subseteq \mathbf{I}(\prec)$ が実効的オーバートであることと $\{n \in \mathbb{N} \mid A \cap [n]_\prec \neq \emptyset\}$ が c.e. であることは同値である。
  - 例: 次の条件が全て成り立つとき $\langle a, m\rangle \prec \langle b, n\rangle$ とする：
    - $a = b$
    - $m < n$
    - a 番目のチューリング機械は入力 a に対し m ステップ以内に停止しない。

    $\prec$ は c.e. 推移関係であるが、$\exists_{\mathbf{I}(\prec)}([\langle a, 0\rangle]_\prec) = \top \iff$ 「a 番目のチューリング機械は入力 a に対し停止しない」が成り立つため、$\mathbf{I}(\prec)$ は実効的オーバートではない。

オーバート集合 (Overt sets)

Theorem

1. $A_0 \subseteq X$ と $A_1 \subseteq Y$ が (実行的) オーバートならば $A_0 \times A_1 \subseteq X \times Y$ は (実行的) オーバートである。
2. $f\colon X \to Y$ が実現（計算）可能かつ $A \subseteq X$ が (実行的) オーバートならば $f(A)$ が (実行的) オーバートである。
3. $A \subseteq X$ が (実効的) オーバートかつ $U \subseteq X$ が (実効的) 開集合であれば、$A \cap U$ は (実効的) オーバートである。
4. X が (実効的)Discrete かつ $A \subseteq X$ が (実効的) オーバートであれば $X \cap A$ は (実効的) 開集合である。

Proof:

1. $\exists_{A_0 \times A_1}(\varphi) = \exists_{K_0}(\lambda x.\exists_{K_1}(\lambda y.\varphi(x, y)))$ と定義する。
2. $\exists_{f(A)}(\varphi) = \exists_A(\lambda x.\varphi(f(x)))$ と定義する。
3. $\exists_{A \cap U}(\varphi) = \exists_A(\lambda x.\varphi(x) \wedge x \in U)$ と定義する。
4. $\chi_{X \cap A}\colon X \to \mathbb{S}$ を $\chi_{X \cap A}(x) = \exists_A(\lambda y.x = y)$ と定義する。

X 全体が（実行的）オーバート集合であれば、X を（実行的）オーバート空間という。

Theorem

X が（実行的）オーバート空間になるための必要十分条件は $e_X \colon \mathbb{S} \to \mathbb{S}^X$ が実現（計算）可能な左半随を持つことである。

Proof: $\Phi \colon \mathbb{S}^X \to \mathbb{S}$ が e_X の左半随であるとは、任意の $t \in \mathbb{S}$ と $\varphi \in \mathbb{S}^X$ に対し

$$\Phi(\varphi) \leq t \iff \varphi \leq e_X(t)$$

が成り立つことである。$\mathbb{S}^X$ 上の半順序 $\leq$ と e_X の定義より上の条件を

$$\Phi(\varphi) \leq t \iff (\forall x \in X)\,[\varphi(x) \leq t]$$

と表せる。これは $t = \top$ のときは自明に成り立つが、$t = \bot$ のときは $\Phi = \exists_X$ と同値な条件である。 $\square$

オーバート集合と結び半束準同型

Theorem

$A \subseteq X$ がオーバートならば $\exists_A : \mathbb{S}^X \to \mathbb{S}$ は有限結びを保つ。

Proof:

- $(\forall x \in A)\,[\bot_{\mathbb{S}^X}(x) = \bot]$ が成り立つため、$\forall_K(\top_{\mathbb{S}^X}) = \bot$。
- $$\begin{aligned} \exists_A(\varphi \vee_{\mathbb{S}^X} \psi) = \bot &\iff (\forall x \in A)\,[\varphi(x) \vee \psi(x) = \bot] \\ &\iff (\forall x \in A)\,[\varphi(x) = \bot \text{ 且つ } \psi(x) = \bot] \\ &\iff (\forall x \in A)\,[\varphi(x) = \bot] \text{ 且つ } (\forall x \in A)\,[\psi(x) = \bot] \\ &\iff \exists_A(\varphi) \vee \exists_A(\psi) = \bot \end{aligned}$$

$\square$

次に、X と A に条件を追加することで上の定理の逆も成り立つことを示す。

オーバート閉集合からなる冪空間

Definition

位相空間 X の下冪空間 (lower powerspace) $\mathbf{A}(X)$ は、X の閉集合全体の集合に

$$\Diamond U := \{A \in \mathbf{A}(X) \mid A \cap U \neq \emptyset\} \quad (U \in \mathbf{O}(X))$$

から生成される位相を備えた位相空間として定義される。

- $\mathbf{A}$ を関手 (そしてモナッド) に拡張できるが、詳細を省略する。
- X が第二可算であるとき $\mathbf{A}(X)$ も第二可算である。
- X が第二可算でない $\mathbf{QCB}_0$ 空間のとき上記の冪空間が $\mathbf{QCB}_0$ 空間であると限りませんが、列化 (sequentialization) を取れば $\mathbf{QCB}_0$ 空間となる。

オーバート閉集合からなる冪空間

Theorem

X が（実効的）quasi-Polish 空間であるとし、$X \cong \mathbf{I}(\prec)$ となる $\mathbb{N}$ 上の (c.e.) 推移関係 $\prec$ を固定する。

- $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ 上の推移関係 $\prec_L$ を

$$F \prec_L G \iff (\forall a \in F)(\exists b \in G)\, a \prec b$$

  と定義すれば、$\mathbf{A}(X) \cong \mathbf{I}(\prec_L)$ が成り立つ。従って、$\mathbf{A}(X)$ は (実効的)quasi-Polish 空間である。
- $\mathbf{A}(X)$ と有限結びを保つ関数全体からなる $\mathbb{S}^{\mathbb{S}^X}$ の部分空間は、埋め込み $A \mapsto \exists_A$ により実効的同型である。

1. [8] を参照。
2. ここでは、$\Phi \colon \mathbb{S}^X \to \mathbb{S}$ が有限結びを保つとき $\Phi = \exists_A$ となる $A \in \mathbf{A}(X)$ がちょうど一つ存在することを示すが、残りの詳細を省略する。

Proof (続き): $\Phi\colon \mathbb{S}^X \to \mathbb{S}$ が有限結びを保つとする。

$$I = \{F \in \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}) \mid (\forall a \in F)\, \Phi([a]_\prec) = \top\}$$

と定義する。まずは $I \in \mathbf{I}(\prec_L)$ を示す。

- $\emptyset \in I$ であるため $I \neq 0$ が成り立つ。
- $F \prec_L G$ かつ $G \in I$ とする。$a \in F$ ならば $a \prec b$ を満たす $b \in G$ が存在する。$G \in I$ より $\Phi([b]_\prec) = \top$ となり、そして $[b]_\prec \subseteq [a]_\prec$ と Φ の単調性より $\Phi([a]_\prec) = \top$ である。従って、$F \in I$ が成り立つ。
- $A, B \in I$ とする。$d \in A \cup B$ に対し、$[d]_\prec = \bigcup_{c \succ d} [c]_\prec$ かつ $\Phi([d]_\prec) = \top$ が成り立つため、Φ が有限結びを保つ Scott 連続関数であることより $\Phi([c_d]_\prec) = \top$ を満たす $c_d \succ d$ が存在する。このように各 $d \in A \cup B$ に対する c_d を一つずつ選び、有限集合 C に集めれば、$C \in I$ かつ $A \prec_L C \,\&\, B \prec_L C$ が成り立つ。

従って、I をある $A_I \in \mathbf{A}(X)$ と同一視できる。[8] より、任意の $F \subseteq \mathbb{N}$ に対し $A_I \in \bigcap_{a \in F} \lozenge[a]_\prec \iff F \in I$ が成り立つため、I の定義と Φ が有限結びを保つ Scott 連続関数であることから $\Phi = \exists_{A_I}$ を導ける。 □

Lemma

X を実効的 quasi-Polish 空間とする。空でない $A \in \mathbf{A}(X)$ に対し

$$\mathbf{Any}_X(A) \in A$$

を満たす計算可能な多価関数 $\mathbf{Any}_X :\subseteq \mathbf{A}(X) \rightrightarrows X$ が存在する。

Proof: $X \cong \mathbf{I}(\prec)$ となる $\mathbb{N}$ 上の c.e. 推移関係 $\prec$ を固定する。次のように $\prec$ における上昇列 $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ を探す。

- 並列的に $A \in \Diamond[n_0]_\prec$ を満たす $n_0 \in \mathbb{N}$ を探す。A は空でないためそのような n_0 は必ず存在する。
- n_i $(i \geq 0)$ が決まったら、次に $n_i \prec n_{i+1}$ かつ $A \in \Diamond[n_{i+1}]_\prec$ を満たす $n_{i+1} \in \mathbb{N}$ を並列的に探す。$A \cap [n_i]_\prec \neq \emptyset$ であるためそのような n_{i+1} は必ず存在する。

$I = \{a \in \mathbb{N} \mid (\exists i)\ a \prec n_i\}$ は $\prec$ のイデアルであり、また I の全ての近傍が閉集合 A と交わるため $I \in A$ が成り立つ。従って、$\mathbf{Any}_X(A)$ の出力として $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ を探しながら I を枚挙すればよい。 □

オーバート集合における選択公理の計算可能性

$\mathbf{Any}_X$ の計算可能性は X の完備性に依存する。

Theorem

X が第二可算 T_1 空間ならば、次が同値である。

- 空でない $A \in \mathbf{A}(X)$ に対し $\mathbf{Any}_X(A) \in A$ を満たす実現可能な多価関数 $\mathbf{Any}_X :\subseteq \mathbf{A}(X) \rightrightarrows X$ が存在する。
- X が quasi-Polish 空間である。

Proof: [11] を参照。

有界束準同型

Theorem

X が (実効的)quasi-Polish 空間であるとする。

1. $\mathbf{K}(\mathbf{A}(X)) \cong \mathbf{A}(\mathbf{K}(X)) \cong \mathbb{S}^{\mathbb{S}^X}$ が成り立つ。従って、$\mathbb{S}^{\mathbb{S}^X}$ は (実効的)quasi-Polish 空間である。
2. X と有界束準同型からなる $\mathbb{S}^{\mathbb{S}^X}$ の部分空間は、$\eta_X := \lambda\varphi : \mathbb{S}^X.\lambda x : X.\varphi(x)$ と定義される埋め込み $\eta_X : X \to \mathbb{S}^{\mathbb{S}^X}$ により実効的同型である。

Proof:

1. [9] を参照。
2. $x \in X$ に対し $\eta_X(x)$ が有界束準同型であることは容易に示せる。$\mathbf{The}_X :\subseteq \mathbb{S}^{\mathbb{S}^X} \to X$ が η_X の計算可能な逆 (部分) 関数であることを前の Lemma で示した。 $\square$

関数空間の離散性とハウスドルフ性

Theorem

1. X が（実効的）コンパクト空間で Y が（実効的）離散空間ならば Y^X は（実効的）離散空間である。
2. X が（実効的）オーバート空間で Y が（実効的）ハウスドルフ空間ならば Y^X は（実効的）ハウスドルフ空間である。

Proof:

1. $(f = g) := \forall_X(\lambda x.f(x) = f(y))$ と定義する。
2. $(f \neq g) := \exists_X(\lambda x.f(x) \neq f(y))$ と定義する。

□

Table of Contents

6. 計算可能位相空間論のトピック
    - 離散空間
    - ハウスドルフ空間
    - $\mathbb{S}^X$ の束構造
    - コンパクト集合
    - オーバート集合
    - 応用例

応用例

- 閉区間を通常のように $[x, y] = \{z \mid x \leq z \leq y\}$ と表す。
- 読みやすさのために集合論の記号を使用することがある。
  - 例えば、$\exists_X(\varphi) = \top$ の代わりに $\varphi \neq \emptyset$、$\forall_K(\lambda z.\varphi(z))$ の代わりに $K \subseteq \varphi$ と書く。

Lemma

$\langle x, y\rangle \mapsto \forall_{[x,y]}$ は $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ から $\mathbb{S}^{\mathbb{S}^{\mathbb{R}}}$ への計算可能関数である。

Proof:

- $\forall_{[x,y]}(\varphi) = \top$ の必要十分条件は
  - $\psi_0(x)$ かつ $\psi_1(y)$
  - $(\forall i \leq n+1)\,[\psi_i \leq \varphi]$
  - $(\forall i \leq n+1)\,[\exists_{\mathbb{R}}(\psi_i \wedge \psi_{i+1}) = \top]$

  を満たす $\psi_0, \ldots \psi_n \in \mathbb{S}^{\mathbb{R}}$ が存在することである。
- $\varphi \in \mathbb{S}^{\mathbb{R}}$ の名前は $\varphi = \bigvee_{i \in \mathbb{N}} \psi_i$ を満たす $(\psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ を枚挙しているとみなせるため、上の条件は φ の名前から半決定可能である。

$\square$

Theorem

X がコンパクト・オーバート空間ならば、$\sup\colon \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}$ $(f \mapsto \sup_{x\in X} f(x))$ は計算可能である。

Proof: $\Phi\colon \mathbb{R}^X \times \mathbb{S}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{S}^{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ を

$$\Phi(f,\varphi) := \lambda\langle \ell, u\rangle.\forall_{[\ell,u]}(\varphi) \wedge \exists_X(\lambda x.\ell < f(x)) \wedge \forall_X(\lambda x.f(x) < u)$$

と定義すれば、f の上限を含む閉区間 $[\ell, u]$ が開集合 φ に含まれるとき、そしてそのときに限り、

$$\exists_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}(\Phi(f,\varphi)) = \top$$

が成り立つ。従って、$\lambda\varphi.\exists_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}(\Phi(f,\varphi))\colon \mathbb{S}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{S}$ は有界束準同型であり、

$$\sup = \lambda f.\mathbf{The}_{\mathbb{R}}(\lambda\varphi.\exists_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}(\Phi(f,\varphi)))$$

が成り立つ。 □

応用例: 中間値の定理

[23] Theorem 6.3.8 と [21] Section 14 を参照。

Definition

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の非零点が稠密であるとは、任意の $\varphi \in \mathbb{S}^{[0,1]}$ に対し $\varphi \neq \emptyset$ ならば $(\exists z \in \varphi)\, f(z) \neq 0$ が成り立つことである。

$P_f\colon \mathbb{S}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{S}^{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ を $P_f(\varphi)(x,y) = [x,y] \subseteq \varphi \wedge f(x)\cdot f(y) < 0$ と定義する。明らかに f が計算可能であれば P_f も計算可能である。

Lemma

f の非零点が稠密であるとする。$P_f(\varphi)(x,y) = \top$ かつ $\epsilon > 0$ ならば、$|y_0 - x_0| < \epsilon$ かつ $P_f(\varphi)(x_0,y_0) = \top$ を満たす $x_0, y_0 \in [x,y]$ が存在する。

Proof: $P_f(\varphi)(x,y) = \top$ ならば、非零点が稠密性より $f(z) \neq 0$ となる $z \in (\frac{2x+y}{3}, \frac{x+2y}{3})$ が存在する。$P_f(\varphi)(x,z) = \top$ 又は $P_f(\varphi)(z,y) = \top$ が成り立ち、そして $|z-x|$ も $|z-y|$ も $\frac{2}{3}|y-x|$ 未満である。従って、繰り返しにより適切な x_0, y_0 を見つけることができる。 $\square$

応用例: 中間値の定理

Theorem (実効的中間値の定理)

$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ が計算可能であり、かつ $f(0) \cdot f(1) < 0$ ならば、$f(x) = 0$ となる計算可能 $x \in [0,1]$ が存在する。

Proof:

- f の非零点が稠密でなければ $\varphi \neq \emptyset$ かつ $(\forall x \in \varphi)\, f(x) = 0$ となる $\varphi \in \mathbb{S}^{[0,1]}$ が存在し、任意の $q \in \varphi \cap \mathbb{Q}$ に対し $f(q) = 0$ が成り立つ。
- 従って f の非零点が稠密であると仮定してよい。
  $S_f\colon \mathbb{S}^{[0,1]} \to \mathbb{S}$ を

$$S_f(\varphi) := \exists_{[0,1]\times[0,1]}(\lambda\langle x, y\rangle . P_f(\varphi)(x, y))$$

  と定義する。
    - つまり、$S_f(\varphi)$ は「$f(x) \cdot f(y) < 0$ を満たす閉区間 $[x, y] \subseteq \varphi$ が存在する」と同値である。

応用例: 中間値の定理

Proof (続き):

- $S_f(\bot) = \bot$ は明らか。$S_f(\varphi \vee \psi) = \top$ ならば前の Lemma を繰り返すことで $P_f(\varphi \vee \psi)$ を満たしながら一点集合に収束する閉区間の列 $[x, y] \supseteq [x_0, y_0] \supseteq \cdots$ が存在する。十分大きな n に対し $[x_n, y_n] \subseteq \varphi$ 又は $[x_n, y_n] \subseteq \psi$ となるため $S_f(\varphi) \vee S_f(\psi) = \top$ が成り立つ。
- 従って $S_f \in \mathbf{A}([0,1])$ とみなせる。$S_f([0,1]) = \top$ の仮定より $S_f \neq \emptyset$ が成り立ち、S_f は $\mathbf{Any}_{[0,1]}$ の定義域に入っている。
- $x = \mathbf{Any}_{[0,1]}(S_f)$ は計算可能である。$f(x) \neq 0$ ならば、f の連続性より $x \in \varphi \subseteq f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ となる $\varphi \in \mathbb{S}^{[0,1]}$ が存在するが、明らかに $S_f(\varphi) = \bot$ であるため x の定義と矛盾する。従って $f(x) = 0$ が成り立つ。

□

Table of Contents

6. 計算可能位相空間論のトピック
   - 離散空間
   - ハウスドルフ空間
   - $\mathbb{S}^X$ の束構造
   - コンパクト集合
   - オーバート集合
   - 応用例

7. 参考文献

[1] I. Battenfeld, M. Schröder, and A. Simpson, *A convenient category of domains*, Electronic Notes in Theoretical Computer Science **172** (2007), 69–99.

[2] A. Bauer, *The realizability approach to computable analysis and topology*, Ph.D. thesis, Carnegie Mellon University, 2000.

[3] V. Becher and S. Grigorieff, *Borel and Hausdorff hierarchies in topological spaces of Choquet games and their effectivization*, Math. Struct. in Comp. Science **25** (2015), 1490–1519.

[4] R. Chen, *Borel functors, interpretations, and strong conceptual completeness for $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$*, Transactions of the American Mathematical Society **372** (2019), 8955–8983.

[5] M. de Brecht, *Quasi-Polish spaces*, Annals of Pure and Applied Logic **164** (2013), 356–381.

[6] ———, *A generalization of a theorem of Hurewicz for quasi-Polish spaces*, Logical Methods in Computer Science **14** (2018), 1–18.

[7] ———, *Some results on countably based consonant spaces*, RIMS Kôkyûroku No. 2151, 2019.

[8] ———, *Some notes on spaces of ideals and computable topology*, Proceedings of the 16th Conference on Computability in Europe, CiE 2020, Lecture Notes in Computer Science, vol. 12098, 2020, pp. 26–37.

[9] M. de Brecht and T. Kawai, *On the commutativity of the powerspace constructions*, Logical Methods in Computer Science **15** (2019), 1–25.

[10] M. de Brecht, T. Kihara, and V. Selivanov, *Enumerating classes of effective quasi-polish spaces*, Proceedings of the 18th Conference on Computability in Europe, CiE 2022, Lecture Notes in Computer Science, vol. 13359, 2022, pp. 88–102.

[11] M. de Brecht, A. Pauly, and M. Schröder, *Overt choice*, Computability **9** (2020), 169–191.

[12] M. Escardó, *Synthetic topology of data types and classical spaces*, Electronic Notes in Theoretical Computer Science **87** (2004), 21–156.

[13] R. Heckmann, *Spatiality of countably presentable locales (proved with the Baire category theorem)*, Math. Struct. in Comp. Science **25** (2015), 1607–1625.

[14] M. Hoyrup, C. Rojas, V. Selivanov, and D. Stull, *Computability on quasi-Polish spaces*, Descriptional Complexity of Formal Systems, Springer, 2019, pp. 171–183.

[15] M. Korovina and O. Kudinov, *On higher effective descriptive set theory*, Unveiling Dynamics and Complexity, Springer, 2017, pp. 282–291.

[16] A. Pauly, *On the topological aspects of the theory of represented spaces*, Computability **5** (2016), no. 2, 159–180.

[17] M. Schröder, *Admissible representations for continuous computations*, Ph.D. thesis, Fachbereich Informatik, FernUniversität Hagen, 2002.

[18] ______, *Extended admissibility*, Theoretical Computer Science **284** (2002), no. 2, 519 – 538.

[19] M. Schröder, *A Hofmann–Mislove Theorem for Scott open sets*, arXiv: 1501.06452, 2015.

[20] M. Schröder, *Admissibly represented spaces and qcb-spaces*, pp. 305–346, Springer International Publishing, 2021.

[21] P. Taylor, *A lambda calculus for real analysis*, Journal of Logic and Analysis **2** (2010), 1–115.

[22] ______, *Foundations for computable topology*, Foundational Theories of Classical and Constructive Mathematics (G. Sommaruga, ed.), no. 76, Springer-Verlag, 2011.

[23] K. Weihrauch, *Computable Analysis*, Springer, 2000.