実数の計算可能性

1. 計算可能実数

宮部賢志

明治大学数学科

数学基礎論サマースクール 2023

実数の計算可能性

1. 計算可能実数

宮部賢志

明治大学数学科

数学基礎論サマースクール 2023

目次

- 計算可能実数とは
- 自然数・有理数・実数の表現
- 符号付き桁数表現
- コーシー列による表現
- デデキント切断

テーマ

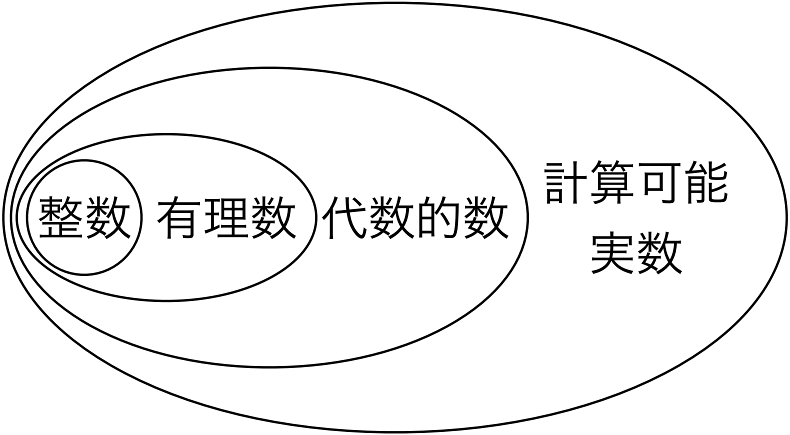
実数は (必要以上に) 複雑

経験則

多くの計算においては，有理数，$\sqrt{2}$ などの代数的数，e, π を適当に組み合わせた数しか出てこない．

それなのに実数論を構築しようとすると，連続の公理を使って抽象的な数を考える必要がある．

本当に必要？？？


整数
有理数
代数的数
計算可能
実数

計算可能実数

- 普通の数学で出てくるほとんど実数は計算可能実数
- 様々な定理を証明する上で計算可能実数があれば十分なことが多い
- 十分でないことも多い

実数の何がどう複雑なのかを理解し，実数論に新たな視点を与える．

目次

- 計算可能実数とは
- 自然数・有理数・実数の表現
- 符号付き桁数表現
- コーシー列による表現
- デデキント切断

計算可能という言葉遣い

日常用語では「$2+3$ は計算できる」などの表現をすることがある.
計算論においては「計算できる」のは何らかの関数.

表現の計算可能性

Turing 機械 $\Phi :\subseteq \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$.

$\{0,1\}^*$ と ω の自然な全単射を考える.

この全単射が単純なものであれば，ω 上の計算可能性だと思うことができる.

全単射の例

2 進有限列	自然数
ϵ	0
0	1
1	2
00	3
01	4
10	5
11	6
000	7
$\vdots$	$\vdots$

列の計算可能性

自然数の列 $(a_n)_{n\in\omega}$ が**計算可能**であるとは，ω から ω への関数

$$n \mapsto a_n$$

が計算可能であることをいう．

集合の計算可能性

自然数の集合 $A \subset \omega$ が計算可能 (computable) であるとは，ある Turing 機械 $\Phi :\subseteq \omega \to \{0,1\}$ が存在して，

$$\Phi(n) = \begin{cases} 1 & n \in A \\ 0 & n \notin A \end{cases}$$

概念ごとに計算可能性を 1 つ 1 つ定義する．

自然数の組の表現

カントールの対関数 (paring function)

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(x+y)(x+y+1)+y$$

により，「自然数の組」も自然数で表現できる．

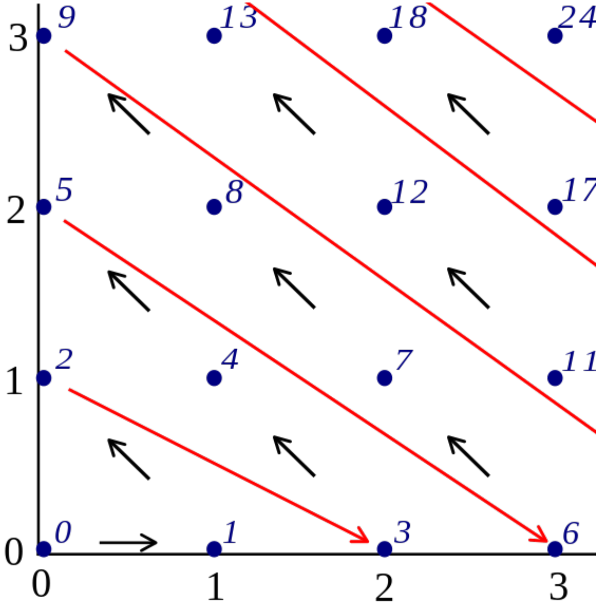
$$\langle x, y, z\rangle = \langle\langle x, y\rangle, z\rangle$$

などとすれば，3 個以上の自然数の組も表現できる．

演習問題

問題 1

カントールの対関数が $\mathbb{N}$ と $\mathbb{N}^2$ の全単射を与えることを確認せよ.
逆写像を計算するアルゴリズムを与えよ.



0
1
2
3
0
1
2
3
0
1
3
6
2
4
7
11
5
8
12
17
9
13
18
24

有理数の表現

$$q = \pm\frac{n}{m}$$

有理数は符号と自然数 2 つで表現できる.

よって，有理数と自然数の全単射を与えることができる.

しかし，余分な計算を避けて，全射 (surjective) により表現していると思っても良い.

有理数の数列・集合の計算可能性

これらの表現により，有理数の数列が計算可能，有理数の集合が計算可能などの概念が自然に定まる．

注意：同じ対象の表現は同じ値を返す必要がある．

つまり，対象の表現を与えることで，自然数上の計算可能性から，様々な数学的対象の計算可能性が導かれる．

実数の 2 進数表現

自然数や有理数は有限の情報で表されるのに対し，実数を表現するには無限の情報が必要.

0 と 1 の 2 進無限列 $p \in 2^\omega$ に対し，

$$\rho_{bin}(p) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) 2^{-n-1} \in [0,1]$$

により対応する実数を表現する．これを，2 進表現 (binary representation) と呼ぶ.

整数部分を加えることで，任意の実数を表現できる.

計算可能実数の定義

定義 2

計算可能な ρ_{bin} 表現を持つ実数を計算可能実数 (computable real) と呼ぶ.

自然数や有理数が計算可能という言い方はしない.

しかし実数の ρ_{bin} 表現は 2 進無限列であり，関数とみなすことができ，計算可能かどうかを議論できる.

A. Turing. "On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem" Proceedings of the London Mathematical Society 2 (42): 230–265 (1936)

有理数は計算可能実数

例 3

有理数，e，π は計算可能実数.

演習問題

dyadic rational とは $\pm k \cdot 2^{-n}$, $(k, n \in \mathbb{N})$ の形で表される有理数のこと.

問題 4

実数 $x \in [0, 1]$ に対しそれを表現する 2 進無限列はいくつあるか. dyadic rational かどうかで場合分けして答えよ.

目次

- 計算可能実数とは
- 自然数・有理数・実数の表現
- 符号付き桁数表現
- コーシー列による表現
- デデキント切断

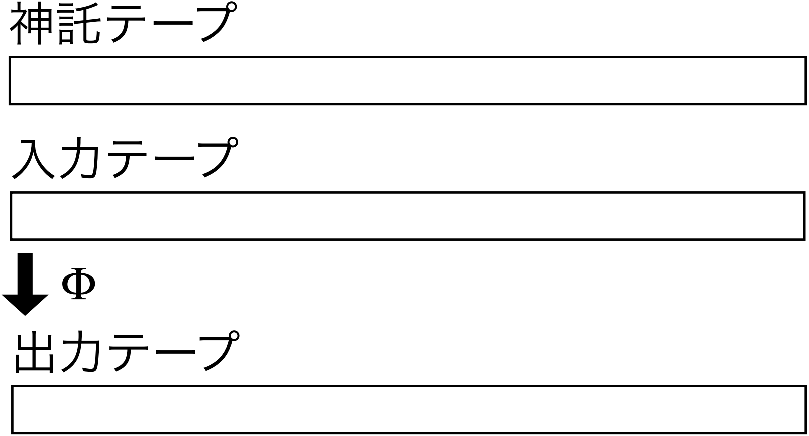
実関数の計算可能性

実関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が計算可能であるとは，入力 x の実数としての表現を，出力 x の実数としての表現に，計算可能に変換できることを意味する．

神託つき Turing 機械 Φ で入力が自然数 $n \in \omega$，出力が $\{0, 1\}$ であるとする．

このとき，神託を入力とし，$\{0, 1\}^\omega$ の元を出力とする Turing 還元 (Turing functional)$\Phi :\subseteq 2^\omega \to 2^\omega$ と思うことができる．

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] & y = f(x) \\ p \arrow[u] \arrow[r, "\Phi"] & q \arrow[u] \end{tikzcd}$$


神託テープ
入力テープ
Φ
出力テープ

2 進無限展開はよい表現ではない

$f(x) = 3x$ は計算可能であってほしい.

$\frac{1}{6}$ の 2 進無限展開は $0.00101010101\cdots$

$f(1/6) = 1/2$.

入力の有限桁を見ても，出力が $1/2$ より大きいか小さいか分からない．つまり，出力の表現の最初の桁が 0 なのか 1 なのか分からない.

よって，表現 ρ_{bin} に対して，$f(x) = 3x$ は計算可能ではない.

符号付き桁数表示

$\bar{1}$ で -1 を表すとする．

$p \in \{0, 1, \bar{1}\}^\omega$ に対して，

$$\rho_{sd}(p) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) 2^{-n-1} \in [-1, 1]$$

により実数を表現する．これを符号付き桁数表示 (signed-digit representation) と呼ぶ．

演習問題

問題 5

実数が計算可能な ρ_{bin} 表現を持つことと，計算可能な ρ_{sd} 表現を持つことは同値であることを示せ.

加算は計算可能

定理 6

$f(x, y) = x + y$ は ρ_{sd} に対し計算可能な関数である.

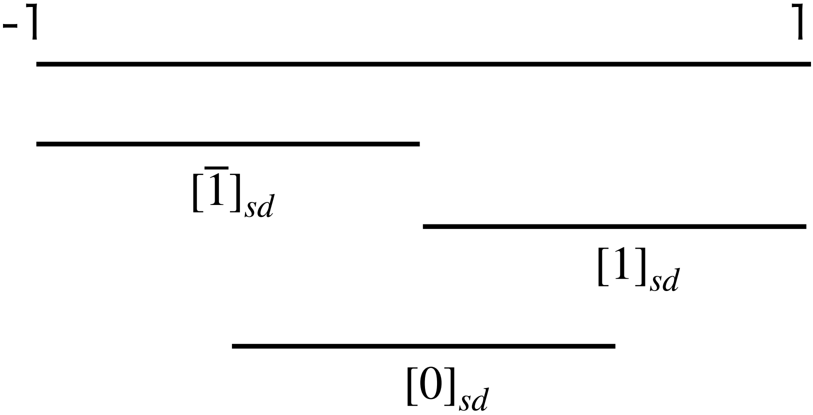
補題

$$[\sigma]_{sd} = \{\rho_{sd}(p) \ : \ \sigma \prec p \in \{0, 1, \bar{1}\}^{\omega}\}$$

$p \in \{0, 1, \bar{1}\}^{\omega}$ に対し，$p \upharpoonright n$ を固定すると，$\rho_{sd}(p)$ が取りうる範囲は長さ 2^{-n+1} の閉区間になる．

逆に長さ 2^{-n} 以下の閉区間 I に対して，$I \subseteq [\sigma]_{sd}$ となる長さ n の σ が存在する．

注意：ρ_{bin} では後者が成り立たない．



-1
1
$[\bar{1}]_{sd}$
$[1]_{sd}$
$[0]_{sd}$

証明 1

$x, y \in \mathbb{R}$ の ρ_{sd} 表現 $X, Y \in \{0, 1, \bar{1}\}^\omega$ が任意に与えられたときに，$x + y$ の ρ_{sd} 表現 Z を計算するアルゴリズムを与える．$\subseteq [Z \upharpoonright n]_{sd}$

$Z \upharpoonright n$ が定まっているとして，その延長である $Z \upharpoonright (n + 1)$ を帰納的に定める．

$m = n + 3$ として，

x y I_n $\subseteq [Z \upharpoonright (n+1)]_{sd}$

$$I_{n+1} = [X \upharpoonright m]_{sd} + [Y \upharpoonright m]_{sd}$$

I_{n+1}

とおくと，I は長さ $2^{-m+2} = 2^{-n-1}$ の閉区間．帰納法の仮定で $I \subseteq [Z \upharpoonright n]_{sd}$ として良い．

前の補題から $I \subseteq [Z \upharpoonright (n + 1)]_{sd}$ と延長することができる．

証明 2

すべての $n \in \omega$ に対し，

$$x + y \in I \subseteq [Z \restriction n]_{sd}$$

であるから，Z は $x + y$ の ρ_{sd} 表現である．

演習問題

問題 7

$x \times y$ および $1/x$ も ρ_{sd} に関して計算可能であることを示せ.

定理 8

計算可能実数は通常の四則演算に関して体を成す.

演習問題

問題 9

実数 $x \in [-1, 1]$ に対しそれを表現する符号付き桁数表示はいくつあるか．dyadic rational かどうかで場合分けして答えよ．

目次

- 計算可能実数とは
- 自然数・有理数・実数の表現
- 符号付き桁数表現
- コーシー列による表現
- デデキント切断

有理コーシー列による実数の構成

$(a_n)_n$ がコーシー列であるとは,

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \omega)(\forall n, m \geq N)|a_n - a_m| < \epsilon.$$

コーシー列を「同じ値に収束する」関係からなる同値類で割った商体を実数として定義する.

ならばコーシー列を実数の表現として使ってはどうか?

コーシー表現

有理数の列 $(a_n)_n$ で,

$$|\alpha - a_n| \le \sum_{k=n}^{\infty} |a_{k+1} - a_k|$$

$$|a_{n+1} - a_n| \le 2^{-n-1} \text{ for all } n \in \omega$$

$$\le \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k-1}$$

を満たすものに対し,

$$= 2^{-n}$$

$$\rho_c((a_n)_n) = \lim_n a_n$$

で定義される表現 ρ_c を (速い) コーシー表現 ((fast) Cauchy representation) と呼ぶ.

速いコーシー表現が必要な理由

通常のコーシー表現では，最初の n 項が分かっても，収束先の実数について何の情報も得られない．
上で定義したコーシー表現では，

$$|a_n - \rho_c((a_n)_n)| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |a_{k+1} - a_k| \underline{<} 2^{-n}$$

なので，a_n が収束先の 2^{-n} 近似になっている．

コーシー表現の長所と短所

符号付き桁数表示の方が圧縮された形で表現している.

コーシー表現は冗長な表現だが，証明には楽なことが多い.

同値な表現

定理 10

ρ_{sd} と ρ_c は計算同値 *(computably equivalent)*．すなわち一方の表現からもう一方の表現を一様に計算できる．

つまり，どちらの表現を使っても同じ計算可能性が導かれる．

ρ_{bin} や通常のコーシー表現は同値にならない．

証明

ρ_{sd} 表現から ρ_c 表現を作る方だけ示す.

$x \in \mathbb{R}$ とその ρ_{sd} 表現 $p \in \{0, 1, \overline{1}\}^\omega$ に対し, $\cancel{a_n} = 0$,

a_0

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} p(k) 2^{-k-1}$$

とすると,

$$|a_{n+1} - a_n| \leq 2^{-n-1}$$

であり,

$$\lim_n a_n = x$$

なので, $(a_n)_n$ は x の ρ_c 表現.

演習問題

問題 11

ρ_c 表現から ρ_{sd} 表現を作る計算可能な変換を与えよ.

計算可能実数の同値な定義

$x \in \mathbb{R}$ に関して以下は同値.

1. 計算可能な ρ_{bin} 表現を持つ.
2. 計算可能な ρ_{sd} 表現を持つ.
3. 計算可能な ρ_c 表現を持つ.
4. 計算可能な有理数列 $(a_n)_n$ が存在して，すべての n で $|a_n - x| < 2^{-n}$ となる.

ここで 2^{-n} の部分は上から単調に 0 に収束する計算可能な列なら何でも良い.

演習問題

問題 12

前のページの事実を確認せよ.

目次

- 計算可能実数とは
- 自然数・有理数・実数の表現
- 符号付き桁数表現
- コーシー列による表現
- デデキント切断

デデキント切断

実数の構成の 1 つがデデキント切断 (Dedekind cut).

有理数 $\mathbb{Q}$ の部分集合 A：

- $A \neq \emptyset$, $A \neq \mathbb{Q}$, (空でも全体でもない)
- $x \in A, y < x \Rightarrow y \in A$, (下に閉じている)
- $x \in A \Rightarrow \exists y \in A . x < y$. (最大限が存在しない)

実数 $r \in \mathbb{R}$ と有理数の集合 $\{x \in \mathbb{Q} \ : \ x < r\}$ を同一視する.

参考：『数学ガールの秘密ノート／数を作ろう』(結城浩)2023 年 4 月発売

左切断

実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して，$\{q \in \mathbb{Q} \ : \ q < x\}$ を x の左切断 (left-cut) と呼ぶ．$\{q \in \mathbb{Q} \ : \ q > x\}$ を右切断 (right-cut) と呼ぶ．
左切断や右切断は実数の表現としては不自然．

左切断は不自然

表現を計算可能に (連続的に) 変換するためには，有限桁を出力するのに有限情報で分かる必要がある．

もし，$x \in \mathbb{R}$ の表現として，

$$A = \{q \in \mathbb{Q} \; : \; q < x\}$$

を採用すると，x が有理数のとき，$x \notin A$ が有限情報から判定できる必要がある．

例えば，$\{q \in \mathbb{Q} \; : \; q < \sqrt{2}\}$ と $\{q \in \mathbb{Q} \; : \; q < -\sqrt{2}\}$ の有限桁から，足して 0 より大きいか判定できる必要がある．しかしそれは不可能．

c.e. 集合

計算可能な関数 $f :\subseteq \omega \to \omega$ の値域となるとき c.e. 集合と呼ぶ．

一般に計算可能実数 x に対して左切断 $\{q \in \mathbb{Q} \ : \ q < x\}$ は c.e. 集合になる．

なぜなら，$(a_n)_n$ を $x \in \mathbb{R}$ の計算可能なコーシー列とすると，

$a_n - 2^{-n} \leq x \leq a_n + 2^{-n}$ なので，$q \in \mathbb{Q}$ に対し，

$$q < x \iff (\exists n) q < a_n - 2^{-n}$$

より，右側を満たす $q \in \mathbb{Q}$ を enumerate すればよい．

左 c.e. 実数

左切断 $\{q \in \mathbb{Q} \ : \ q < x\}$ が c.e. 集合であるとき，x は左 c.e. 実数 (left-c.e. real) と呼ぶ．

右切断が c.e. 集合であるとき，右 c.e. 実数 (right-c.e. real) と呼ぶ．

定理 13

$x \in \mathbb{R}$ が左 *c.e.* であることと，単調増加で計算可能な有理数列 $(a_n)_n$ で $x = \lim_n a_n$ となるものが存在することは同値．

証明

x が左 c.e. であれば，$A = \{q \in \mathbb{Q} \ : \ q < x\}$ の有限近似列 $(A_s)_s$ が存在して，$a_s = \max A_s$ は単調非減少な計算可能な有理数列で x に収束する．

$b_s = a_s - 2^{-s}$ とすれば単調増加になる．

単調増加で計算可能な有理数列 $(a_n)_n$ が存在したとすれば，$q \in \mathbb{Q}$ に対し，

$$q < x \iff (\exists n) q < a_n$$

なので，右側を満たす $q \in \mathbb{Q}$ を enumerate すれば良い．

左 c.e. 実数と計算可能実数

定理 14

$x \in \mathbb{R}$ が計算可能であることと，x が左 *c.e.* かつ右 *c.e.* であることは同値.

計算可能ならば左 c.e. かつ右 c.e. であることはすでに示した.

左 c.e. かつ右 c.e. であれば，単調増加・減少で計算可能な有理数 $(a_n)_n, (b_n)_n$ が存在し，x に収束する.

各 n に対し，$b_m - a_m < 2^{-n}$ となる m を探して，$c_n = a_m$ とおけば，

$$c_n \leq x, \quad x - c_n \leq b_m - a_m < 2^{-n}$$

より $(c_n)_n$ は計算可能な有理数列で x に速く収束する．よって，x は計算可能.

演習問題

問題 15

$x \in \mathbb{R}$ が計算可能であることと，計算可能で単調増加な有理数列 $(a_n)_n$ ですべての n で $x - a_n < 2^{-n}$ を満たすものが存在することは同値であることを示せ.