実数の計算可能性

2. できること・できないこと

宮部賢志

明治大学数学科

数学基礎論サマースクール 2023

テーマ

計算可能実数の集合は実閉体を成す

目次

代数的実数

定義 1

有理数係数の代数方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

の根となる実数を代数的実数 (real algebraic number) と呼ぶ．そうではない実数を超越的実数 (real transcendental number) と呼ぶ．

例 2

有理数，$\sqrt{2}$ などは代数的実数．e, π などは超越的実数．

代数的実数の性質

定理 3

代数的実数を係数にもつ代数方程式の実数根は代数的実数.

代数方程式を解くという操作に関して閉じている.

このような集合を**実閉体** (real closed field) と呼ぶ.

計算可能実数は実閉体

定理 4 (Rice 1954, Grzegorczyk 1955)

計算可能実数の集合は実閉体を成す.

中間値の定理への帰着 1

ゴールは「計算可能実数を係数に持つ代数方程式の実数根が計算可能実数」を示すこと.

代数方程式の次数に関する帰納法で示す.

計算可能実数の根が 1 つあることを示せば，因数定理から，

$$f(x) = (x - \alpha)g(x)$$

と因数分解できて，$g(x)$ は $f(x)$ より次数の低い代数方程式なので，帰納法よりすべての実数根は計算可能実数.

中間値の定理への帰着 2

もし重根なら，

$$f(x) = (x-\alpha)^m g(x),\ (m \geq 2)$$

とかけるが，

$$f'(x) = (x-\alpha)^{m-1} h(x)$$

とかけ，$f'(x)$ は $f(x)$ より次数の低い代数方程式なので，α は計算可能実数と分かる.

$f(x)$ の単根が計算可能実数であることを示せば良い.

これは代数方程式に対する中間値の定理を示すことにほかならない.

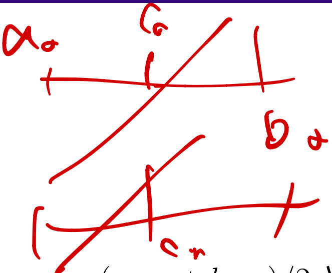
目次

中間値の定理

定理 5

実数上の閉区間 $[a, b]$ で定義される実数値連続関数 f が $f(a) < 0 < f(b)$ を満たすなら，$f(c) = 0$, $a < c < b$ を満たす実数 c が存在する．

証明 1



$a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = (a_0 + b_0)/2$ とする.

各 $n \in \omega$ に対し,

$f(c_n) = 0$ ならば c_n が求める解.

$f(c_n) < 0$ ならば $a_{n+1} = c_n$, $b_{n+1} = b_n$, $c_{n+1} = (a_{n+1} + b_{n+1})/2$ とする.

$f(c_n) > 0$ ならば $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c_n$, $c_{n+1} = (a_{n+1} + b_{n+1})/2$ とする.

証明 2

この操作が無限に続くとする.

$a_n < c_n < b_n$ で，$b_n - a_n \to 0$ から，

$c = \lim_n a_n = \lim_n b_n = \lim_n c_n$ が存在する.

$f(a_n) < 0$ と f の連続性から $f(c) = \lim_n f(a_n) \leq 0$

同様に $f(b_n) > 0$ なので $f(c) \geq 0$

よって，$f(c) = 0$.

計算可能版中間値の定理

定理 6

実数上の閉区間 $[a, b]$ で定義される実数値計算可能関数 f が $f(a) < 0 < f(b)$ を満たすなら，$f(c) = 0$, $a < c < b$ を満たす計算可能実数 c が存在する.

注意：計算可能関数ならば連続.

証明 1

f は連続なので，a, b をわずかに内側の有理数としてとることができる．

$(a_n), (b_n), (c_n)$ を先程と同様に定義する．

f が計算可能関数なので，$f(c_n)$ は計算可能実数．

しかし，$f(c_n) = 0, > 0, < 0$ の判定は計算可能にはできない．

半決定可能

$A \subseteq \omega$ が c.e. 集合であれば，$n \in A$ であればそのことが有限時間で分かるが，$n \notin A$ であったときにはそのことは有限時間では判定できない．

計算可能実数 x とその近似コーシー列 $(a_n)_n$ に対し，

$$x > 0 \iff (\exists n) a_n - 2^{-n} > 0$$

なので，正しければ有限時間で判定できるが，正しくない場合には有限時間で判定できない．このような場合，関係 $x > 0$ は半決定可能 (semi-decidable) とか c.e. 関係などと呼ぶ．

証明 2

$f(c_n) = 0$ は判定できないが，もしそうなら有理数解が存在するので，主張が成り立つ．
もし $f(c_n) \neq 0$ ならば，$f(c_n) > 0$ および $f(c_n) < 0$ はどちらも半決定可能なので，有限時間で判定可能．
$b_n - a_n$ が小さくなることから，$c = \lim_n c_n \in [a_n, b_n]$ は計算可能実数．

注意

中間値の定理の計算可能版は上で見たように非一様に成立する．
f の表現から c の表現が一様に計算可能とは言っていないし，それは成り立たない．

目次

left-cut

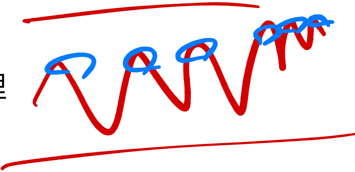
$\{ q \in \mathbb{Q} ; q < x \}$

c.e.

実数の連続性の公理

実数の連続性の公理として同値なものがいくつか知られている.

1. Dedekind の切断
2. Wierstrass の公理 (空でない有界な集合は上限を持つ)
3. 有界な単調増加数列の収束
4. Cauchy 列の収束+アルキメデスの原理
5. 区間縮小法+アルキメデスの原理
6. Bolzano – Weierstrass の定理 (有界数列は収束する部分列を持つ)



有界で計算可能な数列は、計算可能実数に収束する部分列を持つか?

それぞれの計算可能性を見ていこう.

Specker sequence

定理 7

$A \subseteq \omega$ が計算可能 $\iff \alpha = \sum_{n \in A} 2^{-n-1}$ が計算可能実数.

停止問題などの計算可能でない c.e. 集合が存在するので,

系 8

計算可能で有界・単調増加な有理数列で,その極限が計算可能でないものが存在する.*(Specker sequence)* つまり,左 *c.e.* 実数で計算可能実数でないものが存在する.

証明

$(\Rightarrow)$
$a_s = \sum_{n \in A \restriction s} 2^{-n-1}$ は極限に収束するコーシー列.
$(\Leftarrow)$
極限 α が dyadic rational であれば，A の候補はすべて計算可能.
そうでなければ，任意の $s \in \omega$ に対して α の十分良い近似を計算することで，$A \restriction s$ を計算することができる．すなわち，A は計算可能.
例：$0.10000010000\cdots$ なら後の 1 が出てくるところまで下から近似できれば $0.100000\cdots$ が確定する.

$a_n \to x \in \mathbb{R}$ $m : \omega \to \omega$

$\forall i, n.\ i \geq m(n) \Rightarrow |x - a_i| \leq 2^{-n}$

$\uparrow$ 収束率

$b_n = a_{m(n)}$

<u>Prop</u> 計算可能な収束率を持つ ⇒ 極限は計算可能

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N.\ \forall m, n \geq N\ |a_m - a_n| < \varepsilon$

$\varepsilon = 2^{-n}$

$\varepsilon = 2$

$a_n \to x$, $\forall n.\ |x - a_n| < 2^{-n}$

$b_n = a_{2n}$ とすると $\forall n.\ |x - b_n| < 2^{-2n}$

部分列をとることで、speed up できる。

$a_n \to x$, xが計算可能でも.

$(a_n)_n$が計算可能な収束率を持つとは限らない.

計算可能なxにわざとゆっくり収束するような

$(a_n)_n$をつくることができる

xが計算可能なら、$\forall n.\ |x - a_n| < 2^{-n}$となる計算可能な$(a_n)$が存在する。

xが計算不可能であれば、計算可能な収束率を持たないので、どのくらいまで近いか分からない

speedability

(1) 計算可能 $\Longleftrightarrow$ いつでもspeed upできる.

(2) ランダム $\Longrightarrow$ 部分的にでもspeed upできない

$\not\Longleftarrow$

逆は成り立たない

by CCA2023.

Dedekind の切断

問題 9

計算可能な集合 $A \subset \mathbb{Q}$ で

- $A \neq \emptyset$, $A \neq \mathbb{Q}$,
- $x \in A, y < x \Rightarrow y \in A$,
- $x \in A \Rightarrow \exists y \in A . x < y$.

となるものに対し，$\sup A$ は計算可能実数となる．

証明

1,2 番目の条件から A は有界.

有理数を $q_1, q_2, \cdots$ と計算可能に並べる.

その順番で A に含まれるものだけを $r_1, r_2, \cdots$ と並べる.

$a_n = \sup_{i \leq n} r_i$ は計算可能で単調~~増加~~な有理数列で,

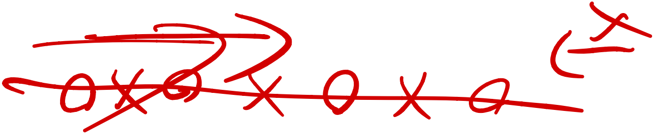
非減少

$\sup A = \lim_n a_n$ は左 c.e. 実数.

$\inf A^c$ は右 c.e. 実数.

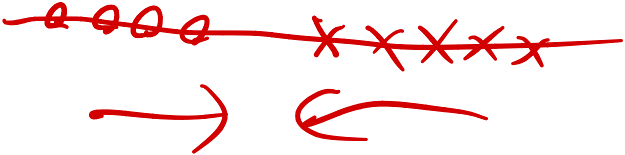
$\sup A = \inf A^c$ より，これは計算可能実数.

Wierstrass の公理



問題 10

空でない有界な計算可能な有理数の集合 A の上限 $\sup A$ は左 c.e. 実数だが，計算可能とは限らない．



証明 1

a_{n-1} b_n $a_n \longrightarrow x$

前に見たように $\sup A$ は左 c.e. 実数.

計算可能でない左 c.e. 実数 x が存在することはすでに見た.

x に収束する計算可能で単調増加な有理数列を $(a_n)_n$ とする.

すべての n で $a_{n-1} < b_n < a_n$ で，各 b_n は dyadic rational で

$b_n = \pm m \cdot 2^{-k}$, m は奇数, $k \in \omega$, と書いたときに $n \leq k$ となるようにする.

証明 2

$A = \{b_n \ : \ n \in \omega\}$ とすると，A は空でない有界な有理数の集合で，$x = \sup A$ は計算可能でない．

A が計算可能であることを示す．

$q \in \mathbb{Q}$ に対して，q が dyadic rational でなければ，$q \notin A$.

$q = \pm m \cdot 2^{-k}$, m は奇数，$k \in \omega$ であれば，$\{b_1, \cdots, b_k\}$ までを探して q が含まれていれば $q \in A$，含まれていなければ $q \notin A$ とする．

Cauchy 列の収束

問題 11

計算可能な有理数列で通常の意味で Cauchy 列だが，収束先は計算可能実数でないものが存在する．

証明

Specker sequence は通常の意味で Cauchy 列で収束先は計算可能実数でない.

区間縮小法

問題 12

計算可能な有理数列 $(a_n)_n, (b_n)_n$ で,

$$a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \cdots \leq b_1 \leq b_0$$

かつ $b_n - a_n \to 0$ となるものに対して, $\lim_n a_n = \lim_n b_n$ は計算可能実数.

証明

$\sup_n a_n$ は左 c.e.，$\inf_n b_n$ は右 c.e.

$b_n - a_n \to 0$ より $\sup_n a_n = \inf_n b_n$ なので，これは計算可能実数.

Bolzano – Weierstrass の定理

問題 13 (Le Roux and Ziegler in MLQ 2008, Theorem 3.6)

極限

有界な計算可能有理数列で計算可能な密集点 (cluster point) を持たないものが存在する.

目次

可算

集合 A が可算 (countable) であるとは,

$$A = \{a_0,\ a_1,\ \cdots\}$$

のように自然数の添字を使って数え上げられる (enumerate) ことをいう．ただし有限も含む.

実数の集合は非可算 (uncountable) である.

自然数 $\mathbb{N}$，有理数 $\mathbb{Q}$，代数的実数，計算可能実数の集合はそれぞれ可算.

よって，計算不可能な実数は存在する.

数え上げ

Turing 機械のプログラムは有限情報なので自然数で数え上げられる．

$\omega \to \omega$

よって，e-th の部分計算可能関数 Φ_e という形で数え上げることができる．

一方，全域計算可能関数を計算可能に数え上げることはできない．

それを仮定すると対角線論法で矛盾を導くことができる．

	0	1	2	3	4	...
f_0 Φ_0						
f_1 Φ_1						
f_2 Φ_2						
f_3 Φ_3						
⋮						

$g(n)$

$\neq f_n(n)$

左 c.e. 実数の数え上げ

定理 14

すべての左 *c.e.* 実数を *(*重複を許して*)* 計算可能に数え上げることができる.

証明 1

「すべての部分計算可能関数の計算可能な数え上げ」を固定する

$$\Phi_e :\subseteq \omega \to \mathbb{Q},$$

$$\alpha_e = \sup_n \Phi_e(n)$$

α : 左 c.e.

$\exists a_n,\ a_0 < a_1, \cdots \to \alpha$

$\forall n.\ \Phi_e(n) = a_n$

$\alpha_e = \alpha$

とおくと，$(\alpha_e)_e$ はすべての左 c.e. 実数になる．

ここで，$\Phi_e(n)$ は未定義かもしれないので，並列に計算するのか，順番に計算するのか指定する必要がある．

全域な関数だけですべての左 c.e. 実数を数え上げているのでどちらでもよい．

証明2

ただし「すべての n で $\Phi_e(n)$ が未定義」「$\Phi_e(n)$ が非有界」の場合も含まれている.

これを避けたければ,

$$\Phi_e(n) :\subseteq \omega \to \mathbb{Q} \cap [0,1],$$

$$\alpha_e = \sup_n \{\Phi_e(n) \ : \ n \in \omega\} \cup \{0\}$$

として $[0,1]$ 内にある左 c.e. 実数を数え上げてから，その数え上げに整数部分を足せば良い.

計算可能実数の数え上げはできない

定理 15

すべての計算可能実数の計算可能な数え上げは存在しない.

証明 1

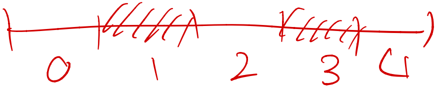
「すべての計算可能実数の計算可能な数え上げ」が存在したとすれば，「すべての全域計算可能関数の数え上げ」が存在する．

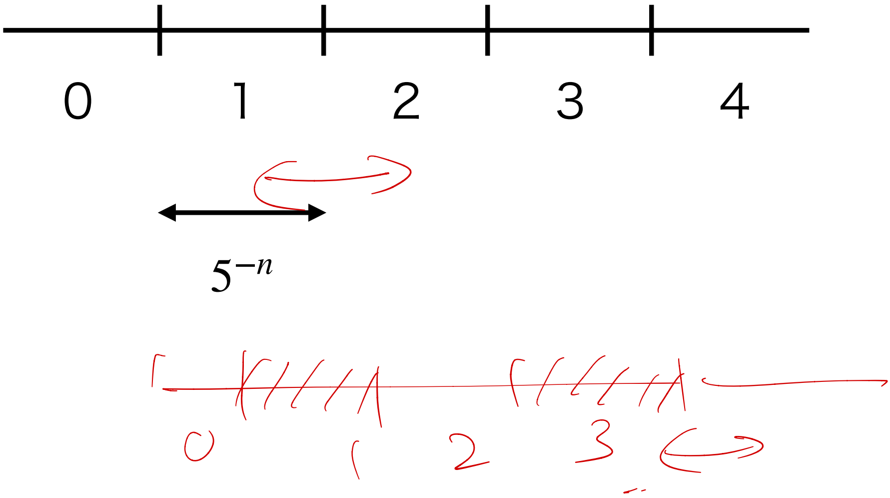
実数は $[0,1]$，関数は ω から $\{0,1\}$ とする．

全域計算可能関数 $f:\omega\to\{0,1\}$ に対して，

$$r=\sum_{n=0}^{\infty} g(n)5^{-n-1},\ \ g(n)=\begin{cases}1 & (\text{ if } f(n)=0)\\ 3 & (\text{ if } f(n)=1)\end{cases}$$

という実数を対応させる．




0
1
2
3
4
5^{-n}
0
1
2
3

証明 2

逆に計算可能実数 $r \in [0,1]$ に対して，r を含む 5^{-n} 未満の区間を計算~~す~~し，$1,3$ の区間に共通部分があるかどうかみることで，もとの関数 f を復元できる．

もし，$1,3$ のどちらにも共通部分がなければ，$f(n)$ は適当に定めれば良い．

「すべての計算可能実数の計算可能な数え上げ」が存在したとして，上の方法で「全域計算可能関数の数え上げ」を作成する．

任意の全域計算可能関数 f に対して上で定めた実数 r から f が復元されるので，すべての全域計算可能関数が現れる．

別証明 1

直接対角線論法を使って構成することもできる．

計算可能実数の計算可能な数え上げ (α_e) があったとする．

すなわち，$(e,n) \mapsto I_{e,n}$，$I_{e,n}$ は α_e を含む長さ 2^{-n} の区間で端点が有理数のもの，が計算可能であるとする．

$(\alpha_e)_e$ に含まれない計算可能実数 x を作る．

長さ 2^{-2n} -2 の閉区間 J_n で，$J_n \supset J_{n+1}$ となるものを計算可能に作って，$x = \bigcap_n J_n$ とする．

$$|J_{n-1}| = 2^{-2(n-1)-2}$$

α_n

$$|I_{n,2n+2}| = 2^{-2n-2}$$

$$|J_n| = 2^{-2n-2} \qquad |J_n| = 2^{-2n-2}$$

別証明2

各 $n \in \omega$ について,

$$\alpha_n \in I_{n,2n+2},\ x \in J_n,\ I_{n,2n+2} \cap J_n = \emptyset$$

なので, $\alpha_n \neq x$.
すなわち, x は数え上げ $(\alpha_e)_e$ に含まれない計算可能実数.
よって, すべての計算可能実数を計算可能に数え上げることはできない.