実数の計算可能性

3. 極限計算可能実数と弱計算可能実数

宮部賢志

明治大学数学科

数学基礎論サマースクール 2023

目次

- 計算可能解析
- 極限計算可能実数
- 弱計算可能実数

参考書

1. Klaus Weihrauch, “Computable Analysis: An Introduction”, Springer, 2000.
2. V. Brattka, P. Hertling, K. Weihrauch, “A Tutorial on Computable Analysis”. In: S.B. Cooper, B. Löwe, A. Sorbi (eds) New Computational Paradigms. Springer, 2008.
3. V. Brattka, P. Hertling, “Handbook of Computability and Complexity in Analysis”, Springer, 2021.

website

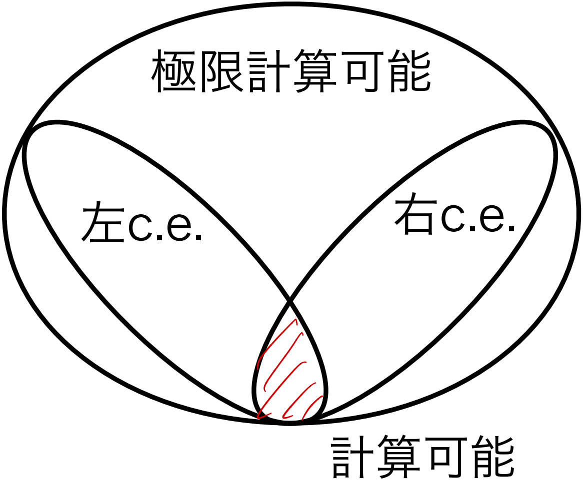
Computability & Complexity in Analysis network

`http://cca-net.de/`

目次

テーマ

極限計算可能実数 *(limit computable real)*


極限計算可能
左c.e.
右c.e.
計算可能

極限計算可能実数

- 実閉体になる
- 極限を取る操作に関してある程度閉じている

定義

定義 1

実数 x が極限計算可能 (limit computable) もしくは計算近似可能 (computably approximable) とは，計算可能な有理数列 $(a_n)_n$ の極限となること．

注意：$(a_n)_n$ は単調増加である必要はない．収束の速度はすごく遅いかもしれない．

極限補題

自然数の集合に対する極限補題 (limit lemma) はよく知られているが，以下は実数に対する極限補題．

補題 2

$x \in \mathbb{R}$ が極限計算可能 $\iff$ x の表現が $\emptyset'$ から計算可能．

特に 2 進無限展開が $\emptyset'$ から計算可能なので，$x \in \Delta^0_2$ ともかく．

$$\underset{\mathrm{HALT}}{\overset{=\phi'}{K}} = \{e \in \omega : \Phi_e(e)\downarrow\} \quad \Phi_e(n)$$

証明 1

$x \in \mathbb{R}$ が極限計算可能とする．

$(a_n)_n$ を x に収束する計算可能な有理数列とする．

各 $n \in \omega$ に対し，以下を満たす $N \in \omega$ が存在する：

$$(\forall k, m \geq N)\boxed{|a_k - a_m| < 2^{-n}.}$$

nを入力として
これを満たさない
k, mが存在
すれば止まる、
存在しなければ
止まらない

$\emptyset'$ でこれは判定可能だから，各 n から $N = N(n)$ が計算できる．

$a_{N(n)}$ は x の 2^{-n} 近似の有理数であり，$(a_{N(n)})_n$ は x のコーシー表現で，$\emptyset'$ から計算可能．

証明 2

速い

x のコーシー表現 $(a_n)_n$ が $\emptyset'$ から計算可能であるとする．

すなわち，神託つき計算可能関数 Φ で，$\Phi^{\emptyset'}(n) = a_n \in \mathbb{Q}$ となるものが存在する．

c.e. 集合　　　最初の u(n) しか使わない

計算可能な近似列 $J_s \to \emptyset'$ に対し，

$$a_{n,s} = \Phi^{J_s}(n)$$

$J_s \upharpoonright u(n) = \emptyset' \upharpoonright u(n)$

s stepまで計算

とおくと，n に依存する十分大きな s について $a_{n,s} = a_n$．

$|a_{n,s} - a_{n-1,s}| < 2^{-n}$ のとき stage s で $a_{n,s}$ は a_n の候補と呼ぶ．

$a_{0,s}$ は常に a_0 の候補である．

証明3

計算可能な有理数列で x に収束する列 $(b_m)_m$ を以下のように作る.
a_n の候補を n の小さい順に順番に $(b_m)_m$ に入れていく.
ただし, a_k の候補が変化したら, k に戻って順番に入れていく.

$a_{n,s}$

b_0

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$a_{0,0}$	$a_{1,0}$	$a_{2,0}$			
$a_{0,1}$	$a_{1,1}$	$a_{2,1}$			
$a_{0,2}$	$a_{1,2}$	$a_{2,2}$			
$\vdots$	b_1	$\vdots$			
$a_{0,\infty}$		$a_{2,0}$			
b_3	b_4	b_2, b_5			

速い
正しいコーシー
表現

証明 4

N_s を stage $s-1$ までででどこまでを候補として $(b_m)_m$ にいれたか.

m_s を $(b_m)_m$ に候補として入れた個数を表す変数として準備する.

Construction

$N_0=-1$, $m_0=0$ とする.

$s\in\omega$ に対し

$$k\le m_s, a_{k,s}\neq a_{k,s-1}$$

となる最小の k を探す．もし存在すればその k に対し,

$$b_{\cancel{n_s}+1}=a_{k,s},\ N_{s+1}=k,\ m_{s+1}=m_s+1.$$

m_s

証明 5

そのような k が存在しないとする.

$a_{N_s+1,s}$ が候補であれば $b_{\cancel{n_s}+1} = a_{m_s+1,s}$, $N_{s+1} = N_s + 1$,

ms

$m_{s+1} = m_s + 1$.

$a_{N_s+1,s}$ が候補でなければ $N_{s+1} = N_s$, $m_{s+1} = m_s$.

Verification

すべての n について $a_{n,s} = a_n$ が $(b_m)_m$ に入れられる.

帰納的に a_k, $k < n$ がすべて $(b_m)_m$ に入れられるとして仮定する.

a_{n-1} が入れられたあと，$a_{n,s} = a_n$ となる最小の s で，$a_{n,s}$ は候補となり，$(b_m)_m$ に入れられる.

その後入れられるのは候補のみなので，$(b_m)_m$ は通常の意味でコーシー列となる.

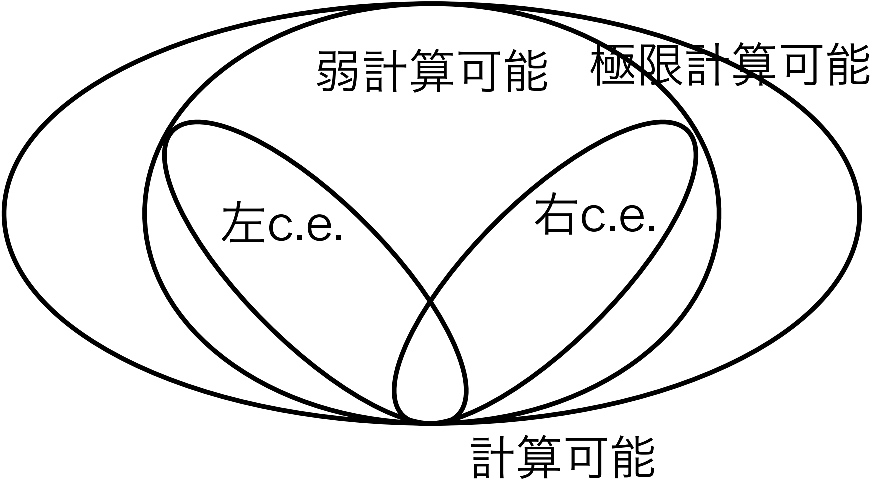
性質

定理 3

極限計算可能実数の集合は実閉体を成す.

計算可能実数は実閉体を成すので，それを $\emptyset'$ に相対化すれば良い.

目次


弱計算可能
極限計算可能
左c.e.
右c.e.
計算可能

定義

定義 4 (Ambos-Spies, Weihrauch, and Zheng 2000)

$x \in \mathbb{R}$ が弱計算可能 (weakly computable) とは，計算可能な有理数列 $(a_n)_n$ で，

$$\sum_n |a_{n+1} - a_n| < \infty, \ \lim_n a_n = x$$

となるものが存在することをいう．

性質

定理 5 (Ambos-Spies, Weihrauch, and Zheng 2000)

$x \in \mathbb{R}$ が弱計算可能実数であることと，ある2つの左 c.e. 実数 y, z があって，$x = y - z$ とかけることと同値.

difference left-c.e.

d.c.e. , d.l.c.e.

証明 1

x が弱計算可能実数で，$(a_n)_n$ によって近似されているとする．
$A = \{n \geq 1 \ : \ a_n \geq a_{n-1}\}$ とおいて，

$$y = a_0 + \sum_{n \in A}(a_n - a_{n-1}), \ z = - \sum_{n \in A^c \setminus \{0\}} (a_n - a_{n-1})$$

とすると，y, z は左 c.e. 実数で，$x = y - z$.

証明 2

左 c.e. 実数 y, z に対して $x = y - z$ とかけたとする．

y, z に収束する計算可能で単調増加な有理数列 $(b_n)_n, (c_n)_n$ に対し，

$$a_{2n} = b_n - c_n,\ a_{2n+1} = b_{n+1} - c_n$$

とおくと，$(a_n)_n$ は計算可能な有理数列で，

$$|a_{2n+1} - a_{2n}| = b_{n+1} - b_n,\ |a_{2n+2} - a_{2n+1}| = c_{n+1} - c_n$$

であり，

$$\lim_n a_n = \lim_n b_n - \lim_n c_n = y - z = x.$$

分離

定理 6

弱計算可能実数で左 *c.e.* でも右 *c.e.* でもないものが存在する.

定理 7

極限計算可能実数で弱計算可能実数でないものが存在する.

証明 1

定理 8 (Friedberg-Muchnik theorem, 1957, 1956)

Turing 還元で比較不可能な *c.e.* 集合 $B, C \subseteq \omega$ が存在する.

証明2

$X \subseteq \omega$ に対し，

$$\chi_X = \sum_{n \in X} 2^{-n-1},$$

$$X \oplus Y = \{2n \ : \ n \in X\} \cup \{2n+1 \ : \ n \in Y\}$$

とおく．

比較不可能な c.e. 集合 B, C に対し，

$$\chi_{B \oplus C^c}$$

は，弱計算可能だが，左 c.e. でも右 c.e. でもない．

証明 3

$\chi_{B\oplus C^c}$ が左 c.e. と仮定して，$C \leq_T B$ であることを示す.

B と $C(0)\cdots C(n-1)$ が分かっているとして，$C(n)$ を計算する.

C は c.e. なので，$C(n) = 1$ は半決定可能.

$C(n) = 0$ ならば，$\chi_{B\oplus C^c}$ が左 c.e. であることから，

$$\chi_{B\oplus C^c} > \sum_{k\in B\oplus C^c\restriction(2n+1)} 2^{-k-1} + 2^{-(2n+1)-1}.$$

証明 1

各弱計算可能次数 x に対して，ある計算可能な有理数列 $(a_n)_n$ で，

実数

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k - a_{k-1}| \le 1$$

となるものが存在する．

各 $d \in \omega$ に対して，適当な n で，

$$I_d = (a_n - 2^{-d-1},\ a_n + 2^{-d-1})$$

という区間を考える．$m > n$ に対して $a_m \notin I$ となったら，I をその m に対して再定義する．この再定義される回数は高々 2^{d+1} 回である．a_n が定義されていない場合もあるが，a_n が定義されている範囲で I を更新する．

証明 2

e 番目の部分計算可能な有理数列を $(a^e_n)_n$ とする．

a^e_n が未定義ならば，$m \geq n$ に対して a^e_m は未定義であるとする．

また a^e_n が定義されるためには，

$$\sum_{k=1}^{n} |a^e_k - a^e_{k-1}| \leq 1$$

であるという条件を加える．

このように修正した各 $(a^e_n)_n$ に対し，前のページのように区間 $I_{e,d}$ を定義する．

$$|J_{n-1}| = 2^{-2(n-1)-2}$$

$$|I_{n,2n+2}| = 2^{-2n-2}$$

$$|J_n| = 2^{-2n-2} \qquad |J_n| = 2^{-2n-2}$$

証明3

「すべての計算可能実数の計算可能な並びあげは存在しない」ことの証明同様に，新しい実数 x を作る．

今回の場合，$I_{e,d}$ が更新されるので，J_d も更新される．

各 $I_{e,d}$ の更新は有限回なので，J_d の更新も有限回．

J_d が更新されたときに，その中点を候補として x の近似列を作ることで，x が極限計算可能実数であることが分かる．

Lipschitz 関数で閉じている

定理 9 (Miller 2017)

計算可能関数 f が弱計算可能実数 x の近傍で *Lipschitz* であるとする．このとき，$f(x)$ は弱計算可能.

注意：例えば x で微分可能であれば十分.

証明

弱計算可能実数 x の近似列 $(a_n)_n$ に対して，

$$(f(a_n))_n$$

は一様に計算可能な実数列で，

$$|f(a_{n+1}) - f(a_n)| < L|a_{n+1} - a_n|$$

より，

$$\sum_n |f(a_{n+1}) - f(a_n)| < L \sum_n |a_{n+1} - a_n| < \infty.$$

$(f(a_n))_n$ を修正して有理数にすれば，$f(x)$ が弱計算可能実数であると分かる．

陰関数定理

McNicholl (2008) は，陰関数定理が計算可能であることを示している．
微分可能な関数で定まる孤立解を取る操作についても，弱計算可能実数は閉じていることが分かる．
これらのことを使うと，弱計算可能実数の集合が実閉体を成すことが示せる．

実閉体

弱計算可能実数は計算可能実数から左 c.e. 実数を含んで差に関して閉じるように広げた数.

定理 10 (Raichev 2005, Ng 2005)

弱計算可能実数の集合は実閉体を成す.

「計算可能実数の集合が実閉体を成す」ことの証明と流れは同じだが，係数の変化量と根の変化量の関係を調べる必要があり，もう一手間かかる.