

実数の計算可能性

4. 演習問題

宮部賢志

明治大学数学科

数学基礎論サマースクール 2023

演習問題

問題 1 (稠密性)

計算可能実数も弱計算可能実数も稠密であることを示せ. 特に任意の有理数 $p, q, p < q$, に対して, 有理数でない計算可能な実数 x で $p < x < q$ となるものが存在する. 任意の計算可能実数 $x, y, x < y$, に炊いて, 計算可能でない弱計算可能実数 z で $x < z < y$ となるものが存在する.

演習問題

問題 2 (交代級数の収束)

単調非増加の計算可能な有理数列 $(a_n)_n$ で 0 に収束するものに対し,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

は計算可能実数に収束することを示せ.

演習問題

問題 3 (ベキ級数)

計算可能な有理数列 $(a_n)_n$ に対し, ベキ級数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が収束半径 R を持つとする. $|x| < R$ となる計算可能実数 x に対し, $f(x)$ は計算可能実数となる. 収束円上では x が計算可能でも, $f(x)$ は計算可能とは限らない.

演習問題

問題 4 (最大値)

計算可能関数 f の閉区間 $[a, b]$ での最大値は計算可能実数.

演習問題

問題 5 (積分)

1. 任意の計算可能関数 $f(x)$ に対し定積分 $I = \int_a^b f(x)dx$ は計算可能実数である.
2. 非負の計算可能関数 $f(x)$ に対し広義積分 $J = \int_0^\infty f(x)dx$ は左 c.e. 実数である.
3. 非負で狭義単調減少の計算可能関数 $f(x)$ で $\int_0^\infty f(x)dx$ が計算可能でないものが存在する.