実関数の計算可能性・計算量
1. 計算可能実関数

ティース　ホルガー
京都大学大学院人間環境学研究科

数学基礎論サマースクール 2023

目次

演習問題について

- 公演中に時々演習問題を課す予定です。
- 提出する必要はありませんが、授業内容を理解できたか自分で確認するためにお勧めします。
- 見てほしい方はメールでお送りください。
thies.holger.5c@kyoto-u.ac.jp
- 部分的な提出、質問などだけでも大丈夫です。

表現空間

ベール空間上の計算

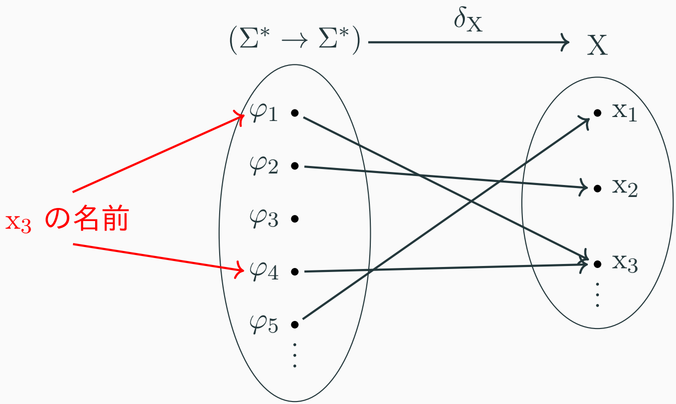
- 計算モデル：チューリング機械
- チューリング機械は有限文字列を有限文字列に移す。
- $\Sigma = \{0, 1\}$ とする, Σ^* は Σ 上の有限文字列とする。
- Σ^{n} を長さ n の文字列、Σ^ω を Σ 上の無限文字列とする。
- 前の講義はカントール空間 Σ^ω 上の計算を定義した。つまり、$\varphi \in \Sigma^\omega$ と $\mathrm{F} :\subseteq \Sigma^\omega \to \Sigma^\omega$ の計算可能性などを定義した。

ベール空間上の計算

- 最初は計算可能性だけ考えるが、あとで計算量についても考えたい。計算量は入力の長さに対して制約の消費を測る。
- そのためエンコーディングに $\Sigma^* \to \Sigma^*$ の関数を使うのがより自然である。
- $\Sigma^* \to \Sigma^*$ の関数空間（同値に $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ の空間) はベール空間という。ベール空間を $\mathcal{B}$ で表す。

表現

空間 X の表現 (Representation): 全射的部分写像 $\delta :\subseteq \mathcal{B} \to \mathrm{X}$.

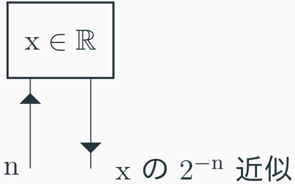


表現空間 $\quad \mathbf{X} := (\mathrm{X}, \delta_{\mathrm{X}})$.

- Dyadic rational は $d = z \cdot 2^{-n}$ で表せる有理数のことである（$z \in \mathbb{Z}$、$n \in \mathbb{N}$）。
- Dyadic rational の集合を $\mathbb{D}$ とかく。
- 固定な $n \in \mathbb{N}$ に対して、$d = z \cdot 2^{-n}$ で表せる数の集合を $\mathbb{D}_n$ と書く。
- 基本的は $n \in \mathbb{N}$ を一進法（unary)、$d \in \mathbb{D}$ を二進法で表す。
- 簡単のため、エンコーディングの詳細を大体省略する。

コーシー表現

実数 x に収束する（早い）コーシー列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{D}$ は全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n - x| \leq 2^{-n}$ を満たす列である。



定義 1.1 (コーシー表現)

実数 $\mathbb{R}$ のコーシー表現 δ_C は以下の通りに定義する。

$$\delta_C(\varphi) = x \iff \varphi \text{は } x \text{ に収束する早いコーシー列を表す。}$$

ここは入力の自然数を一進法、出力の有理数を二進法でエンコーディングする。

計算可能実数

定義 1.2 (δ 計算可能)

(X, δ) を表現空間とする。$x \in X$ の計算可能な δ-名前が存在するとき、x を δ-計算可能と呼ぶ。

定義 1.3 (計算可能実数)

実数 $x \in \mathbb{R}$ がコーシー表現上で計算可能であれば、x を計算可能実数と呼ぶ。同値に, 全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して、$|\varphi(n) - x| \leq 2^{-n}$ を満たす計算可能な関数 $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{D}$ が存在すると x を計算可能実数と呼ぶ。

演習問題 1

ここに定義された計算可能実数がカントール空間上で定義された計算可能実数と同値であることを証明せよ。

対関数

定義 1.4 (文字列の対関数)

- 文字列の対関数 $\langle\cdot,\cdot\rangle : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ を以下のように定義する。

$$\langle \mathrm{p}, \mathrm{q}\rangle := \mathrm{p}_1\mathrm{q}_1\mathrm{p}_2\mathrm{q}_2 \dots \mathrm{p}_\mathrm{n}\mathrm{q}_\mathrm{n}$$

すなわち、文字列 p と q を交互に並べる。
なお、長さが同じではない場合は、`0` で padding できる。

- ベール空間上の対関数 $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ を以下のように定義する。

$$\langle \varphi_1, \varphi_2\rangle(\mathrm{q}) := \langle \varphi_1(\mathrm{q}), \varphi_2(\mathrm{q})\rangle$$

- $\langle \varphi_1, \dots, \varphi_\mathrm{n}\rangle := \langle \varphi_1, \langle \varphi_2, \dots, \varphi_\mathrm{n}\rangle\rangle$ を帰納的に定義できる。
- 無限列の $(\varphi)_{\mathrm{i}\in\mathbb{N}}$ の場合を以下のように定義する。

$$\langle(\varphi)_{\mathrm{i}\in\mathbb{N}}\rangle(\mathtt{1}^\mathrm{i}\mathtt{0}\mathrm{q}) := \varphi_\mathrm{i}(\mathrm{q})$$

定義 1.5

1. X, Y を表現空間、δ_X, δ_Y をそれぞれの表現とする．直積空間 $X := X_1 \times X_2$ の表現 $[\delta_X, \delta_Y]$ を以下の通り定義する。

$$[\delta_X, \delta_Y](\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle) = (x, y) \iff \delta_X(\varphi_1) = x \wedge \delta_Y(\varphi_2) = y$$

2. $X_1, X_2, \ldots X_n$ を表現空間、$\delta_{X_1}, \delta_{X_2}, \ldots, \delta_{X_n}$ をそれぞれの表現とすることができる。$\prod_{i=1}^{n} X_i$ の表現 $[\delta_{X_1}, \ldots, \delta_{X_n}]$ を同様に定義できる。

3. X を表現空間と δ_X を X の表現とする。X^ω （X 上の無限列）の表現 δ_X^ω を以下のように定義する。

$$\delta^\omega(\langle (\varphi)_{i \in \mathbb{N}} \rangle) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ \delta_X(\varphi_n) = x_n$$

演習問題 2

X, Y を表現空間、$\delta_{\mathrm{X}}, \delta_{\mathrm{Y}}$ をそれぞれの表現とする。定義1.5で定義された関数 $[\delta_{\mathrm{X}}, \delta_{\mathrm{Y}}] :\subseteq \mathcal{B} \to \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ と $\delta_{\mathrm{X}}^{\omega} :\subseteq \mathcal{B} \to \mathrm{X}^{\omega}$ がそれぞれの空間の表現であることを証明せよ。

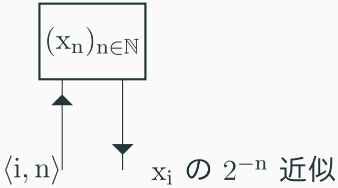
計算可能実数列

定義 1.6 (計算可能実数列)

実数列 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ が δ_C^ω 上で計算可能であれば、$(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ を計算可能実数列と呼ぶ。同値に全ての $i, n \in \mathbb{N}$ に対する

$$|\varphi(i,n) - x| \leq 2^{-n}$$

を満たす計算可能な関数 $\varphi : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{D}$ が存在するとき、$(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は計算可能実数列である。



例 1.7

- 実数列 $\left(\frac{1}{i!}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ は計算可能である。
- $H \subseteq \mathbb{N}$ を決定不能集合とする．以下の実数列 $(x_n)_{i\in\mathbb{N}}$ は計算不能である。

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{if } i \in H, \\ 0 & \text{if } i \notin H \end{cases}$$

例

例 1.8

H を決定不能 r.e. 集合、$h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を H の数え上げにする.
以下の列 $(a_i)_{n \in \mathbb{N}}$ は実数列として計算可能であるが、有利数列としては計算不能である。

$$a_i = \begin{cases} 2^{-m} & \text{if there is an } m \in \mathbb{N} \text{ with } h(m) = i, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

例1.8の証明（１）

$$a_i = \begin{cases} 2^{-m} & \text{if there is an } m \in \mathbb{N} \text{ with } h(m) = i, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- まず、$(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ が有理数の列として計算不能であることを証明する。
- 仮に、$(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ が計算可能とする.
- なお、$a_n \neq 0 \iff n \in H$。
- ただし、有理数の上、0 か 0 ではないのは決定可能。
- したがって、H が決定可能である $\rightarrow$ 矛盾。

例1.8の証明（２）

$$a_i = \begin{cases} 2^{-m} & \text{if there is an } m \in \mathbb{N} \text{ with } h(m) = i, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 次、$(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ は計算可能実数列であることを証明する。
- そのため、入力 $i, n \in \mathbb{N}$ に対して a_i の 2^{-n} 近似を出す方法を述べる。
- $j = 0, 1, \ldots, n$ に対して全ての自然数 $h(j)$ を計算し、$h(j) = i$ を試す。
- $h(j) = i$ であれば, $a_i = 2^{-j}$ が分かる。したがって、正確な値を出力できる。
- $h(j) \neq i$ であれば, $|a_i| \leq 2^{-n}$ が分かる．したがって、0 が a_i の正しい 2^{-n} 近似である。

計算可能実関数

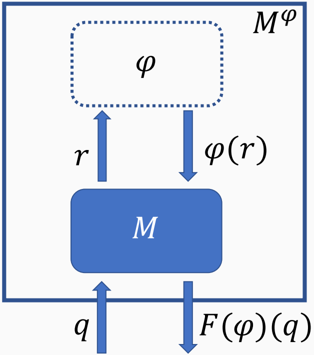
実関数の計算

- ほとんどの計算問題は、特定の実数を計算することを求めるのではなく、ある実数の入力が与えられ、この入力に対して何らかの値、すなわち実関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を計算する。
- 現在はまだ時間やスペースなどの制約を考えず、計算可能性だけを調べたい。
- 実数は既に無限な情報を表しているため、$f(x)$ を限られた時間内で正確に計算することは非現実的である。

定義 1.9

神託機械 $\mathrm{M}^?$ が以下の条件を満たすと、$\mathrm{M}^?$ は部分関数 $\mathrm{F} :\subseteq \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ を計算するという。

$$\mathrm{M}^\varphi(\mathrm{q}) = \mathrm{F}(\varphi)(\mathrm{q}) \text{ for all } \mathrm{q} \in \Sigma^* \text{ and all } \varphi \in \operatorname{dom} \mathrm{F}$$



表現空間上の計算

定義 1.10 (Realizer)

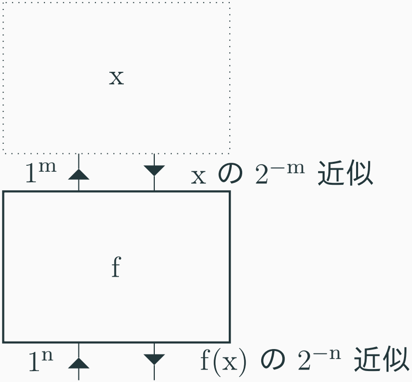
$\mathrm{X} = (X, \delta_X)$, $\mathrm{Y} = (Y, \delta_Y)$ を表現空間とする。
また、$f :\subseteq X \to Y$ と $F :\subseteq \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ とする。全ての $\varphi \in \delta_X^{-1}(x)$ と $x \in \operatorname{dom} f$ に対して $\delta_Y \circ F(\varphi) = f(x)$ であれば、F は f の realizer と呼ぶ。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ \mathcal{B} \arrow[u, "\delta_X"] \arrow[r, "F"'] & \mathcal{B} \arrow[u, "\delta_Y"'] \end{tikzcd}$$

$f :\subseteq X \to Y$ に計算可能な realizer があると f を (δ_X, δ_Y)-計算可能と呼ぶ。

計算可能な実関数

- 部分関数 $f :\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が (δ_C, δ_C)-計算可能であれば、f を単に計算可能実関数と呼ぶ。
- 同じく、部分関数 $f :\subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ が (δ_C^k, δ_C^m)-計算可能であれば、f を計算可能実関数と呼ぶ。



演習問題

演習問題 3

1. 計算可能実関数が計算可能実数を計算可能実数に移すことを証明せよ。つまり、$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と $x \in \mathbb{R}$ が計算可能であれば、$f(x) \in \mathbb{R}$ が計算可能実数であると証明せよ。
2. 計算可能実関数が計算可能実数列を計算可能実数列に移すことを証明せよ。つまり、$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ が計算可能であれば、$(f(x))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ が計算可能実数列であると証明せよ。

定理 1.11

実数の等価 x

eq : $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to$

例1.8

$$a_i = \begin{cases} 2^{-m} & \text{if there is an } m \in \mathbb{N} \text{ with } h(m) = i, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

例1.7

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{if } i \in H, \\ 1 & \text{if } i \notin H \end{cases}$$

注意 1.12

同じく、全て

証明.

例1.8を思い出そう。もし、eq が計算可能であれば、$(\mathrm{eq}(a_i, 0))_{i \in \mathbb{N}}$ が計算可能実数列である（演習問題3)。しかし、例1.7によるとその列が計算不能。 □

次は、これがコーシー表現の問題じゃないことを証明する。

等価の計算可能性

定理 1.13

等価 $x = y$ が決定可能になる実数の表現 $\delta :\subseteq \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ がない。

- 仮に、δ の上で $=$ を決定する神託機械 $M^?$ があるとする。
- x を任意の実数、$\varphi \in \mathcal{B}$ を x の任意の δ 名前とする。
- $M^?$ の神託入力が $\langle \varphi, \varphi \rangle$ とする。
- $M^?$ は神託に有限の質問 $q_1, q_2, \ldots, q_N$ をしてから 1 を出力しないといけない。
- したがって、全ての $\varphi' \in \mathcal{B}$ に対して、$\varphi'(q_1) = \varphi(q_1), \ldots, \varphi'(q_N) = \varphi(q_N)$ があれば φ' も x の名前である。
- そうすると、全ての $x \in \mathbb{R}$ に対して x を表す有限文字列がある。$\mathbb{R}$ が加算であるとの矛盾になる。

例 1.14

以下の関数は全て計算可能である。

1. 計算可能実数 $c \in \mathbb{R}$ に対しての定値写像 $f(x) = c$,
2. $f(x) = -x$,
3. $f(x, y) = x + y$,
4. $f(x, y) = x \cdot y$,
5. $f(x) = \frac{1}{x}$ (for $x \neq 0$),
6. $f(x, y) = \min\{x, y\}$ と $f(x, y) = \max\{x, y\}$,

それぞれの命題を証明するために、全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して、神託から入手した入力の近似をもとに、計算の結果の 2^{-n} 近似を作る方法を述べる。

証明（定値写像）.

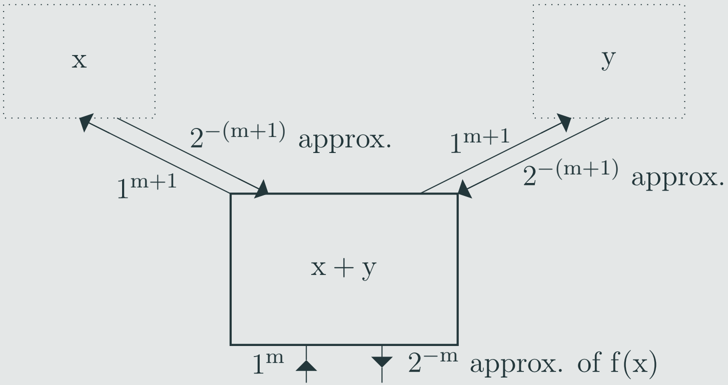
$c \in \mathbb{R}$ が計算可能だから、c を計算するチューリング機械 M が存在する。同じ M が $f(x) = c$ を計算する（神託を無視する）神託機械である。 □

証明（符号反転）.

$-x$ の 2^{-n} 近似を計算するため、神託から x の 2^{-n} 近似 $d \in \mathbb{D}$ をもらう。d から $-d$ の変更は有理数上で計算可能である。 □

足し算

証明（足し算）.



問題

演習問題 4

例1.14の残りの命題を証明せよ。

演習問題 5

次の関数が計算可能実関数であることを証明する。

1. 指数函数 $\mathrm{exp} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \mathrm{x} \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$.
2. 三角関数 $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
3. 実数の距離関数 $\mathrm{d} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \mapsto |\mathrm{x} - \mathrm{y}|$.

定義 1.15 (収束率)

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $x \in \mathbb{R}$ に収束する実数列とする。以下の条件を満たす関数 $m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を収束率（modulus of convergence）という。

$$\text{全ての } i, n \in \mathbb{N} \text{ に対して} i \geq m(n) \to |x - x_i| \leq 2^{-n}$$

演習問題 6

1. $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ を計算可能実数列とする。また、$(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ の収束率 $m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が計算可能とする。極限 $x = \lim x_i$ が計算可能実数であると証明せよ。
2. 収束する列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と収束率 $m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を $\lim x_n$ に移す極限作用素 $\mathrm{LIM} : \mathbb{R}^\omega \times (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ が計算可能であることを証明せよ。

定義 1.16

X, Y を表現空間と δ_{X}、δ_{Y} をそれぞれの表現とする。多価関数 $\mathrm{f} :\subseteq \mathrm{X} \rightrightarrows \mathrm{Y}$ は $\mathrm{F} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ が x の名前を $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ の名前に移すと F を f の realizer を呼ぶ。つまり、以下の条件を満たす F は f の realizer である。

全ての $\varphi \in \delta_{\mathrm{X}}^{-1}(\mathrm{x})$、$\mathrm{x} \in \operatorname{dom} \mathrm{f}$ に対して

$$\delta_{\mathrm{Y}} \circ \mathrm{F}(\varphi) \in \mathrm{f}(\mathrm{x})$$

である。

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[r, "\mathrm{f}"] & \mathrm{Y} \\ \mathcal{B} \arrow[u, "\delta_{\mathrm{X}}"] \arrow[r, "\mathrm{F}"'] & \mathcal{B} \arrow[u, "\delta_{\mathrm{Y}}"'] \end{tikzcd}$$

Soft comparison

例 1.17 (Nondeterministic soft comparison)

以下のように定義されている多価関数

$$\mathrm{sc} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{N} \to \{0, 1\}$$

が計算可能である。

$$\mathrm{sc}(x, y, n) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < y + 2^n, \\ 1 & \text{if } y < x + 2^n \end{cases}$$