実関数の計算可能性・計算量
2. 計算可能実関数の性質

ティース　ホルガー
京都大学大学院人間環境学研究科

数学基礎論サマースクール 2023

CCC 2023

Continuity, Computability, Constructivity

From Logic to Algorithms

Kyoto, Japan

September 25 - 29, 2023

Room 110, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University (Hybrid)

Deadline for registration: Sep 13

https://www.i.h.kyoto-u.ac.jp/ccc2023/

計算可能実関数の性質

定理 2.1

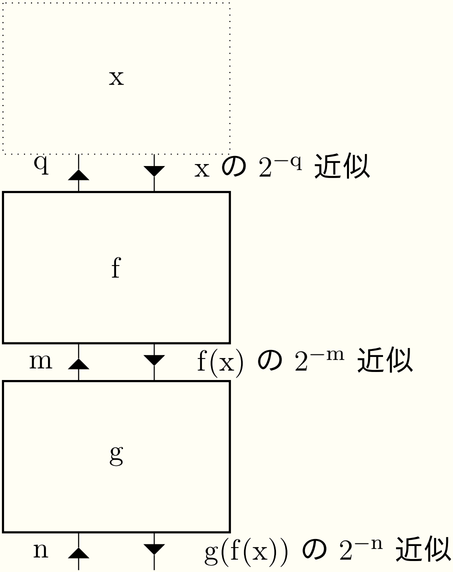
$f, g :\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を計算可能実関数とする。写像の合成 $g \circ f :\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が計算可能である。

表現空間に一般化された定理を証明する。

定理 2.2

$\mathbf{X} = (X, \delta_X)$、$\mathbf{Y} = (Y, \delta_Y)$、$\mathbf{Z} = (Z, \delta_Z)$ を表現空間とする。$f :\subseteq \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$、$g :\subseteq \mathbf{Y} \to \mathbf{Z}$ が（それぞれの表現上で）計算可能であれば、$g \circ f :\subseteq \mathbf{X} \to \mathbf{Z}$ も計算可能である。

証明の大筋



定理2.2の証明（１）

- $h = g \circ f$ の計算可能 realizer $H :\subseteq \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ を定義しないといけない。
- f, g が計算可能であるから、計算可能な realizer $F, G :\subseteq \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ が存在する。
- $H := G \circ F$ が h の realizer であることを証明する。
  - $x \in \mathrm{dom}\, h$ とする。つまり、$x \in \mathrm{dom}\, f$ と $f(x) \in \mathrm{dom}\, h$ が分かる。
  - $\varphi \in \delta_X^{-1}(x)$ とする。
  - F は f の realizer だから, $F(\varphi) \in \delta_Y^{-1}(f(x))$ が分かる。
  - したがって、$G(F(\varphi)) \in \delta_Z^{-1}(g(f(x)))$ が分かる。
  - つまり、H は h の realizer である。

定理2.2の証明（２）

- 次は $\mathrm{H} = \mathrm{G} \circ \mathrm{F}$ が計算可能であることを証明する。
- F, G が計算可能であるから、F, G を計算する神託機械 $\mathrm{M}^?_\mathrm{F}$ と $\mathrm{M}^?_\mathrm{G}$ が存在する。
- $\mathrm{M}^?_\mathrm{F}$ と $\mathrm{M}^?_\mathrm{G}$ から H を計算する神託機械 $\mathrm{M}^?_\mathrm{H}$ を作ることができる。
- そのため $\mathrm{M}^?_\mathrm{G}$ を次のように変更する。
- $\mathrm{M}^\varphi_\mathrm{H}(\mathrm{p})$ を計算するために $\mathrm{M}^?_\mathrm{G}$ と同じように動く。ただし、神託に $\mathrm{q} \in \Sigma^*$ の結果を求める時は代わりに $\mathrm{M}^\varphi_\mathrm{F}(\mathrm{p})$ を計算する。

計算可能実関数の合成

系 2.3

$f, g :\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を計算可能実関数とする。次のように定義されている実関数は全て計算可能である。

- $x \mapsto f(x) \pm g(x)$,
- $x \mapsto f(x)g(x)$,
- $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$,
- $x \mapsto \min\{f(x), g(x)\}$ と $x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$.

証明.

定理2.2を例 1.14 の関数に適用する。 □

計算可能多項式

定理 2.4

計算可能係数がある多項式が計算可能実関数である。つまり、$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ の多項式の全ての係数 $a_0, \ldots, a_n$ が計算可能実数であれば、$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が計算可能実関数である。

次数 n の上で帰納法で証明する。

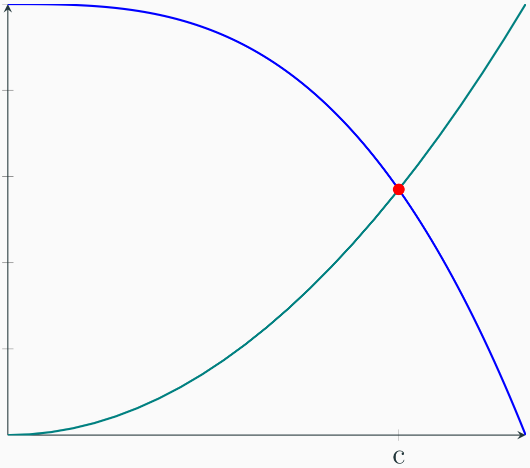
- 定数関数 $p(x) = a_0$ は計算可能である。
- $p(x) = a_{n+1} x^{n+1} + a_n x^n + \cdots + a_0$ とする。
- 帰納法の仮定から $p_1(x) = a_{n+1} x^n + a_n x^{n-1} + a_1$ と $p_2(x) = a_0$ が計算可能である。
- したがって、系2.3により、$p(x) = p_1(x) \cdot x + p_2(x)$ が計算可能である。

定理 2.5 (join of functions)

$f_1, f_2 :\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を計算可能実関数とする。また、$c \in \mathbb{R}$ を $f_1(c) = f_2(c)$ を満たす計算可能実数にする。以下のように定義されている実関数 $f :\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が計算可能である。

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ if } x \leq c, \\ f_2(x) \text{ if } x \geq c \end{cases}$$

証明の大筋



定理2.5の証明（１）

- f_1, f_2 と c が計算可能であれば、$g_1(x) = f_1(x + c)$ と $g_2(x) = f_2(x + c)$ が計算可能実関数である。
- したがって、$c = 0$ の場合が成り立つと十分。
- $M_1^?$ と $M_2^?$ を f_1 と f_2 を計算する神託機械にする。
- $M_1^?$ と $M_2^?$ から f を計算する神託機械 $M^?$ を作る。
- $M^\varphi(n)$ は以下のように動いて、$f(x)$ の 2^{-n} 近似を出力する。
- M は M_1 と M_2 を同時に動かして、$f_1(x)$ と $f_2(x)$ の $2^{-(n+2)}$ 近似 d_1 と d_2 を計算する。

定理2.5の証明（２）

- $\mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2$ が有理数だから、$|\mathrm{d}_1 - \mathrm{d}_2| \leq 2^{-(\mathrm{n}+1)}$ が決定可能である。
- $|\mathrm{d}_1 - \mathrm{d}_2| \leq 2^{-(\mathrm{n}+1)}$ が成り立つと $|\mathrm{f}_2(\mathrm{x}) - \mathrm{d}_1| \leq 2^{-\mathrm{n}}$ も成り立つ。したがって、d_1 を出力すると、正しい近似である。
- なお、$\mathrm{x} = 0$ の場合 $|\mathrm{d}_1 - \mathrm{d}_2| \leq 2^{-(\mathrm{n}+1)}$ は必ず成り立つ。
- したがって、$|\mathrm{d}_1 - \mathrm{d}_2| \leq 2^{-(\mathrm{n}+1)}$ が成り立たないと、$\mathrm{x} \neq 0$。
- $\mathrm{x} \neq 0$ の場合は $\mathrm{x} < 0$ or $\mathrm{x} > 0$ が決定できる。
- $\mathrm{x} < 0$ の場合は d_1 を出力、$\mathrm{x} > 0$ の場合は d_2 を出力する。

計算可能実関数の様々な定義

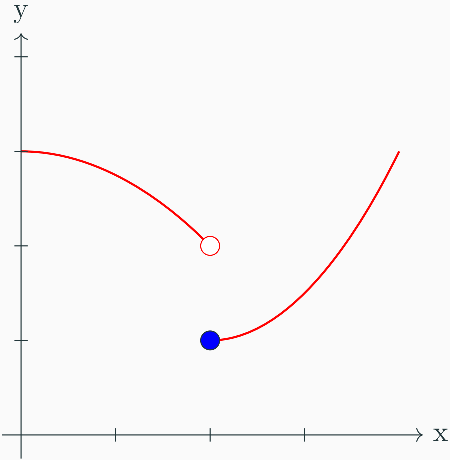
- この章では、コンパクト空間上の計算可能実関数の様々な同値な定義を紹介する。
- 簡単のため大体 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ の場合だけをみる。
- ただし、大体の命題は d 次元の関数やもっと一般的なコンパクト空間に拡大できる。

連続性

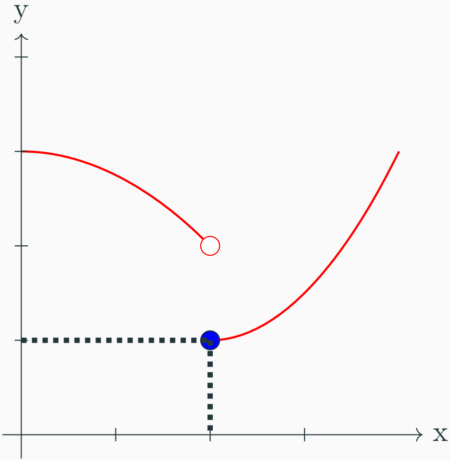
定理 2.6

全ての計算可能実関数が連続である。

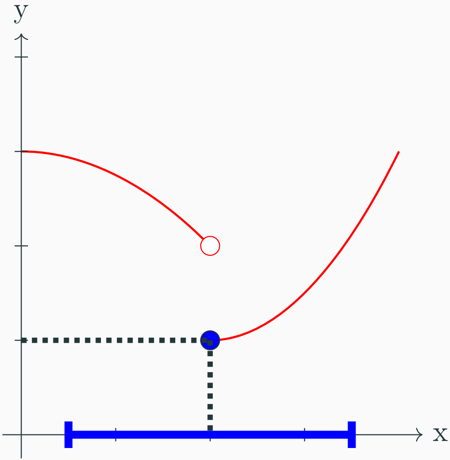
Computable functions are continuous



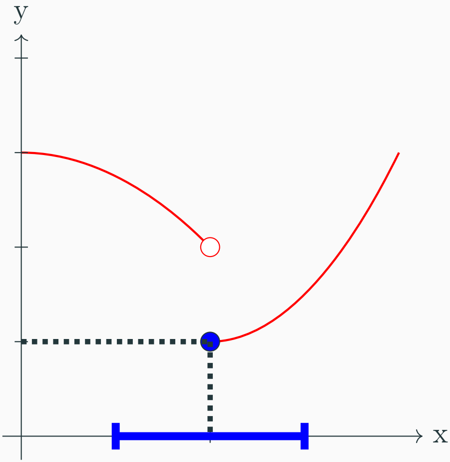
Computable functions are continuous



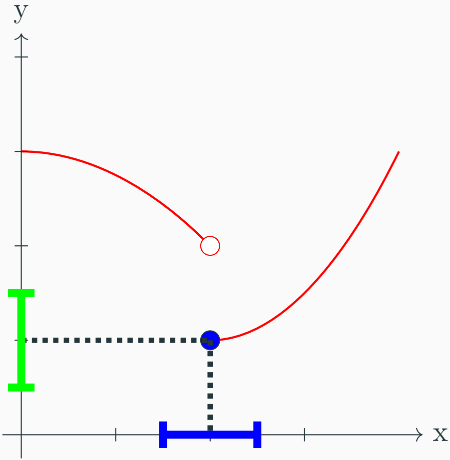
Computable functions are continuous



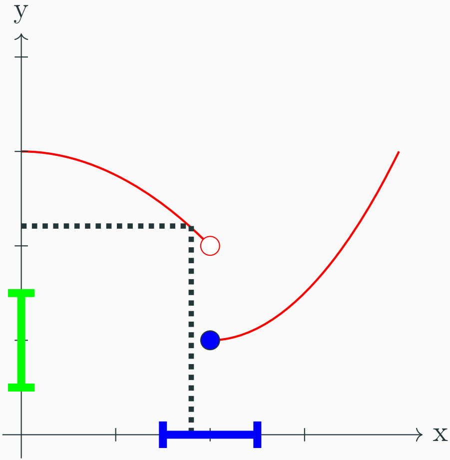
Computable functions are continuous



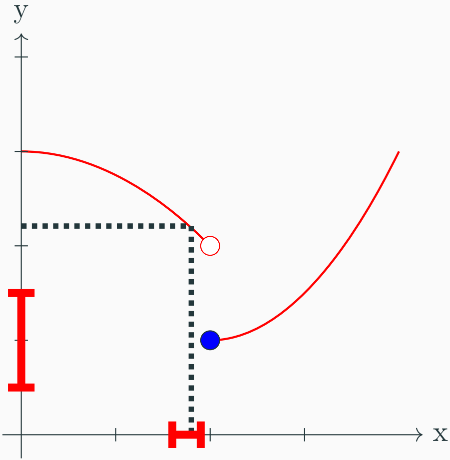
Computable functions are continuous



Computable functions are continuous



Computable functions are continuous



実数の決定可能集合

系 2.7

実数の上の決定可能集合が $\emptyset$ と $\mathbb{R}$ だけである。

- $\emptyset$ の特性関数が定数関数 0 と $\mathbb{R}$ の特性関数が定数関数 1 である。0 と 1 が計算可能実数だから、定数関数が計算可能である。
- $\mathbb{R} \to \{0, 1\}$ の関数が定数関数ではない場合は連続ではない。つまり、計算不能である。

連続率

ヘルダー連続

$$|f(x) - f(y)| \leq C\,|x - y|^{\alpha}$$

定義 2.8 (連続率)

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ を実関数とする。以下の性質を満たす自然数の関数 $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が f の連続率（modulus of continuity）と呼ぶ。

$$|x - y| \leq 2^{-\mu(n)} \to |f(x) - f(y)| \leq 2^{-n}.$$

例 2.9

- リプシッツ連続: $\mu(n) = n + \log L$.
- ヘルダー連続: $\mu(n) = \frac{1}{\alpha}(n + \log C)$.

定理 2.10

$\mathrm{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ とする。以下は同値である。

1. f は計算可能実関数である。
2. f に計算可能な連続率 $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ と以下を満たす（有理数上）の計算可能関数 $\Psi : \mathbb{D} \times \mathbb{N} \to \mathbb{D}$ が存在する。

$$|\Psi(\mathrm{d}, \mathrm{n}) - \mathrm{f}(\mathrm{d})| \leq 2^{-\mathrm{n}} \text{ for all } \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{d} \in \mathbb{D}$$

証明 (1) → (2) （Ψ の存在）

- $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ を計算可能実関数とする。
- f を計算する神託機械 $M^?$ が存在する。
- $M^?$ を以下のように変更して、チューリング機械 N を作る。
- N は入力 $(d, n) \in \mathbb{D} \times \mathbb{N}$ に対して、$M^?$ が入力 n に与えられたように動く。ただし $M^?$ が神託から入力 $x \in \mathbb{R}$ の近似を求めるとき、代わりに d を返す。
- N に計算されている関数 $\Psi : \mathbb{D} \times \mathbb{N} \to \mathbb{D}$ が $|\Psi(d, n) - f(d)| \leq 2^{-n}$ を満たす。
- したがって、2. の条件を満たす計算可能な関数 $\Psi : \mathbb{D} \times \mathbb{N} \to \mathbb{D}$ が存在する。

証明 (1) $\to$ (2) 連続率（１）

- 次は f が計算可能な連続率があることを証明する。
- $n \in \mathbb{N}$ を固定とする。
- $M^?$ は f を計算する神託機械とする。
- $d \in [0,1] \cap \mathbb{D}$ に対して、M^d を全ての質問に対して d を返す神託を与えた機械とする。
- したがって、$M^d(n)$ が $f(d)$ の 2^{-n} 近似である。
- $M^d(n+2)$ の計算をみよう。
- $M^d(n+2)$ が有限時間で停止し、$f(d)$ の $2^{-(n+2)}$ 近似を出力する。
- その間 M が神託に質問 $\varphi(k_1), \ldots, \varphi(k_N)$ をする。
- $k_d = \max\{k_1, k_2, \ldots, k_N\}$、$I_d = (d - 2^{-k_d}, d + 2^{-k_d})$ の開区間とする。

証明 (1) → (2) 連続率（２）

- $\mathrm{x} \in \mathrm{I_d}$ とする。
- $|\mathrm{x} - \mathrm{d}| \leq 2^{-\mathrm{k_d}}$ があるため、$\mathrm{k_1}, \ldots, \mathrm{k_N}$ に d を返す x の名前 φ が存在する。
- φ が上の全ての質問に対して同じ答えを返すから、M の動きは全く同じである。
- したがって、$\mathrm{M}^{\varphi}(\mathrm{n}+2) = \mathrm{M^d}(\mathrm{n}+2)$ が $\mathrm{f(x)}$ の $2^{-(\mathrm{n}+2)}$ 近似でもある。
- つまり、$\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{I_d}$ にすると

$$|\mathrm{f(x)} - \mathrm{f(y)}| = \left|\mathrm{f(x)} - \mathrm{M^d}(\mathrm{n}+2) + \mathrm{M^d}(\mathrm{n}+2) - \mathrm{f(y)}\right| \leq 2^{-(\mathrm{n}+1)}$$

が分かる。

証明 (1) → (2) 連続率（２）

- なお、全ての $\mathrm{d} \in [0,1] \cap \mathbb{D}$ に対して上のような $\mathrm{k_d}$ と $\mathrm{I_d}$ がある。つまり $\{\mathrm{I_d} \mid \mathrm{d} \in [0,1] \cap \mathbb{D}\}$ が $[0,1]$ の開被覆である。
- $[0,1]$ はコンパクト空間であるため、$[0,1]$ を被覆する有限部分集合 $\{(\mathrm{d_1} - 2^{-\mathrm{k_1}}, \mathrm{d_1} + 2^{\mathrm{k_1}}), \ldots, (\mathrm{d_n} - 2^{-\mathrm{k_n}}, \mathrm{d_n} + 2^{-\mathrm{k_n}})\}$ が存在する。
- $\mathrm{k} = \max\{\mathrm{k_1}, \ldots, \mathrm{k_n}\}$ とする。
- $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in [0,1]$ が $|\mathrm{x} - \mathrm{y}| \leq 2^{-\mathrm{k}}$ を満たすとき、二つの場合がある。
- (i) x, y の両方がある区間 $\mathrm{I_{d_i}}$ に入っている。
- (ii) x が y の隣の区間に入っている（注意：二つの区間が重なる)。

証明 (1) → (2) 連続率（３）

- (i) x, y の両方がある区間 I_{d_i} に入っている。
- (ii) x が y の隣の区間に入っている（注意：二つの区間が重なる)。
- (i) の場合は $|f(x) - f(y)| \leq 2^{-(n+1)}$ がある。
- (ii) の場合は二つの区間に入っている $u \in \mathbb{R}$ が存在する。つまり、$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(u) + f(u) - f(y)| \leq 2^{-n}$ がある。
- つまり、$\mu(n) = k$ で定義される関数が f の連続率である。
- ただし、まだ μ が計算可能であることを示してない。

証明 (1) $\to$ (2) 連続率（４）

- μ を計算する方法を示す。
- 入力 $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$ に対して以下のように $\mu(\mathrm{n})$ を計算する。
- 全ての $\mathrm{d} \in [0,1]$ を $\mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2, \ldots,$ として並べ数える。
- $\mathrm{d}_\mathrm{i} \in \mathbb{D}$ に対して上のように k_d が計算できる。
- 全部有理数なので、$[0,1] \subseteq \bigcup_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{m}} \mathrm{I}_{\mathrm{d}_\mathrm{i}}$ が決定可能。
- $[0,1]$ を被覆する $(\mathrm{I}_{\mathrm{d}_\mathrm{i}})_{\mathrm{i} \in \mathbb{N}}$ の有限な部分集合があるため、ある $\mathrm{m} < \infty$ に対して $[0,1] \subseteq \bigcup_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{m}} \mathrm{I}_{\mathrm{d}_\mathrm{i}}$ がある。
- つまり $\mathrm{m} = 1, 2, \ldots$ を全て試すと、必ずいつか停止する。その時 $\max \mathrm{k}_\mathrm{i}$ を出力すると μ の計算ができた。
- f が計算可能な連続率があることを証明した。それで (1) $\to$ (2) が成り立つ。

証明 (2) → (1)

- $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ を実関数、$\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を f の連続率とする。また、μ が計算可能、$\Psi : \mathbb{D} \times \mathbb{N} \to \mathbb{D}$ が $|\Psi(d,n) - f(d)| \leq 2^{-n}$ を満たす計算可能関数とする。
- f を計算する神託機械 $M^?$ を作らないといけない。
- つまり、全ての $x \in [0,1], n \in \mathbb{N}$ に対して x の近似をアクセスしながら、$f(x)$ の 2^{-n} 近似を計算する方法を示す。
- $x \in [0,1]$ とする。また、$\varphi \in \mathcal{B}$ を x の任意の名前、$n \in \mathbb{N}$ とする。
- 以下のように $M^\varphi(n)$ を計算する。
  - $m := \mu(n+1)$ を計算する,
  - 神託から x の 2^{-m} 近似 $d := \varphi(m)$ を求める,
  - $q := \Psi(d, n+1)$ を計算する、
  - q を出力する。
- q が $f(x)$ の 2^{-n} 近似である：

$$|f(x) - q| = |f(x) - f(d) + f(d) - q| \leq 2^{-n}$$

点列計算可能性

定義 2.11 (点列計算可実関数)

$f :\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を実関数とする。f が計算可能実数列を計算可能実数列に移すとき、f を点列計算可（sequentially computable）と呼ぶ。つまり、全ての計算可能実数列 $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ に対して $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ が計算可能実数列であると、f が点列計算可である。

演習問題 8

$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ とする。以下の二つの条件が f が計算可能実関数の必要十分条件であることを証明せよ。

1. f が点列計算可である。
2. f に計算可能な連続率 $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在する。

一般化

演習問題 9

以下の命題を証明せよ。

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が計算可能実関数である $\iff$ 以下の性質を満たす計算可能な $\Psi : \mathbb{D} \times \mathbb{N} \to \mathbb{D}$ と $\mu : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{D}$ が存在する。

1. 全ての $n \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{D}$ に対して $|\Psi(d, n) - f(d)| \leq 2^{-n}$ がある。
2. 全ての $k, n \in \mathbb{N}$、$[x, y] \in [-k, k]$ に対して $|x - y| \leq 2^{-\mu(k,n)} \to |f(x) - f(y)| \leq 2^{-n}$ がある。

Another characterization

定義 2.12 (計算可能な多項式列)

$(\mathrm{P_n})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{D}[\mathrm{X}]$ を dyadic の係数の多項式列とする。

$$\mathrm{p_n(x)} = \sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{D(n)}} \mathrm{a(n,i)x^i}$$

を満たす計算可能な関数 $\mathrm{D}:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$、$\mathrm{a}:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{D}$ が存在するとき、$(\mathrm{P_n})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ を計算可能多項式列と呼ぶ。

定理 2.13 (Computable Weierstrass theorem)

$\mathrm{f}:[0,1]\to\mathbb{R}$ とする。以下は同値である。

1. f は計算可能実関数である。
2. 全ての $\mathrm{n}\in\mathbb{N}$ に対して $\|\mathrm{f}-\mathrm{P_n}\|_\infty \le 2^{-\mathrm{n}}$ を満たす計算可能多項式列 $(\mathrm{P_n})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{D}[\mathrm{X}]$ が存在する。

証明 (2) → (1)

- $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{D}[X]$ を $\|f - P_n\|_\infty \leq 2^{-n}$ を満たす計算可能多項式列とする。
- f が計算可能であることを証明するために、f を計算する神託機械 $M^?$ を作る。
- まずは、二つの入力 $n, m \in \mathbb{N}$ に対して $p_m(x)$ を計算する神託機械 $N^?$ を作る。
- p_m の係数と次数が計算できるから、$p_m(x)$ も計算できる。
- $M^\varphi(n) = N^\varphi(n+1, n+1)$ とすると、$|M^\varphi(n) - f(x)| \leq 2^{-n}$ がある。

証明 (1) $\to$ (2)

証明のアイデアは多項式近似を行なって、エラー分析をする。

演習問題 10

(1) $\to$ (2) を証明せよ。