実関数の計算可能性・計算量
3. 計算できる、計算できない作用素

ティース　ホルガー
京都大学大学院人間環境学研究科

数学基礎論サマースクール 2023

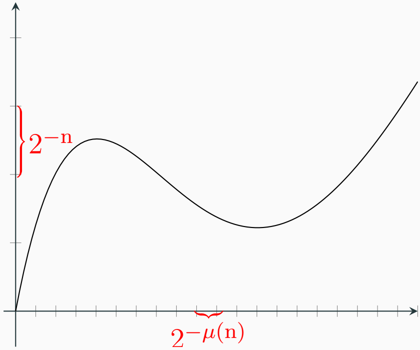
作用素の計算

- 非一様（nonuniform）：計算可能な f を作用素の結果が計算可能実関数/計算可能実数になるか。
  - $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ が計算可能実関数の時、$\max\{f(x) | x \in [0,1]\}$ が計算可能実数、$x \mapsto \max\{f(x) | x \in [0,y]\}$ が計算可能実関数
  - $x \mapsto \int_0^x f(y)dy$ が計算可能実関数
  - 全ての零点が計算不能である計算可能な実関数が存在する
  - 微分 f' が計算不能な計算可能実関数 $f \in C^1([0,1])$ が存在する
- 一様（uniform）：関数 f を入力として、結果に移す。
  - 関数空間の表現が必要
  - 零点（中間値の定理）

最小値が計算可能

定理 3.1

$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ が計算可能実関数の時、最小値 $m = \min_{x \in [0,1]} f(x)$ と最大値 $M = \max_{x \in [0,1]} f(x)$ が計算可能実数である。



定理3.1の証明

- 最小値の場合だけを証明する。
- 区間 $[0, 1]$ を分割し、サンプル上の最小値を取る。
- $\mathrm{m_k} = \min\{\mathrm{f}(\frac{\mathrm{j}}{\mathrm{k}}) \mid 0 \leq \mathrm{j} \leq \mathrm{k}\}$ とする。
- 実数列 $(\mathrm{m_k})_{\mathrm{k}\in\mathbb{N}}$ が計算可能である。
- $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を f の連続率とする。μ が計算可能である。
- したがって、$\mathrm{k} > 2^{-\mu(\mathrm{n})}$ の時 $|\mathrm{m_k} - \mathrm{m}| \leq 2^{-\mathrm{n}}$ である。
- μ が $(\mathrm{m_k})_{\mathrm{k}\in\mathbb{N}}$ の収束率であるから、列の極限が計算可能である。

演習問題 11

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ を計算可能実関数とする。

最小値の関数

$$m : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \min\{f(y) \mid y \in [0,x]\}$$

が計算可能であることを証明せよ。

定理 3.2

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ が計算可能実関数であるとき、$x \mapsto \int_0^x f(y)dy$ も計算可能実関数である。

証明の大筋

- リーマン積分を利用する。
- f の計算可能な連続率 $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在する。
- $n \in \mathbb{N}$ を固定とする, $x_i = i \cdot 2^{-\mu(n)}$, $i = 0, \dots, 2^{\mu(n)}$ とする。
- $\forall y \in [x_i, x_{i+1}]$, $|f(y) - f(x_i)| \le 2^{-n}$

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - 2^{-\mu(n)} \sum_i f(x_i) \right| \le \sum_i \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(y)dy - 2^{-\mu(n)} f(x_i) \right|$$
$$\le \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(y) - f(x_i)|\, dy \le \sum_i 2^{-\mu(n)} \cdot 2^{-n} = 2^{-n}$$

最大点が計算不能

定理 3.3

全ての $N \in \mathbb{N}$ に対して、以下を満たす $f : [0,1] \to [0,1]$ が存在する。

1. $f^{-1}(\{0\}) \subseteq [0,1]$ の測度が少なくても $1 - 2^{-N}$ である。
2. $f^{-1}(\{0\})$ の中に計算可能な実数が一つも入っていない。

さらに、上を満たす滑らかな関数（無限回微分可能関数）がある。

系 3.4

全ての零点（または極点）が計算不能である滑らかな計算可能実関数がある。

定理3.3を証明するために二つの補題が必要。

補題 3.5

$(c_k)_{k\in\mathbb{N}}, (r_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq [0,1]$ を計算可能実数列、$r_k > 0$ とする。

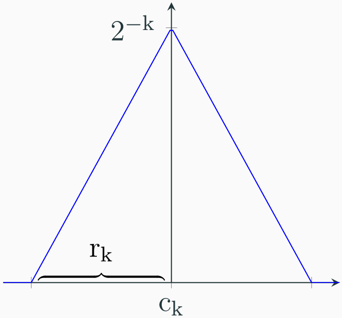
$$U = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (c_k - r_k, c_k + r_k)$$

であるとき、$f^{-1}(\{0\}) = [0,1] \setminus U$ を満たす計算可能実関数 $f : [0,1] \to [0,1]$ が存在する。さらに、上を満たす滑らかな関数がある。

補題3.5の証明（１）

まず、滑らかではない f を以下のように定義する。

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \max\{0, 2^{-k}(1 - |x - c_k| / r_k)\}.$$



- $x \notin (r_k - c_k, r_k + c_k) \to f(x) = 0$
- f が計算可能である。

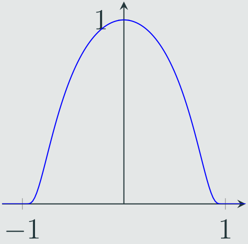
補題3.5の証明（２）

次は前のスライドに定義された関数を滑らかな関数に変更する。そのため、前の山を滑らかな関数に換える。

定義 3.6 (パルス関数)

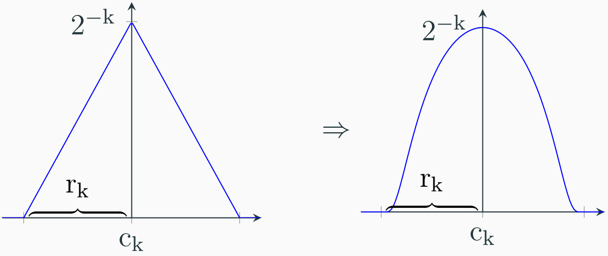
パルス関数 $\mathrm{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を以下のように定義する。

$$\mathrm{p}(\mathrm{x}) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{x}^2}{1-\mathrm{x}^2}} & \text{for } \ |\mathrm{x}| < 1, \\ 0 & \text{for } \ |\mathrm{x}| \geq 1. \end{cases}$$



p が計算可能実関数である。

補題3.5の証明（３）



$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k} p(1/r_k(x - c_k))$$

とする。

演習問題 12

$p \in C^\infty(\mathbb{R})$ と $f \in C^\infty([0,1])$ を証明せよ。

補題3.5が成り立つ。

準備（２）

補題 3.7

全ての $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ に対して、以下のことを満たす計算可能実数列 $(\mathrm{c_k})_{\mathrm{k}\in\mathbb{N}}, (\mathrm{r_k})_{\mathrm{k}\in\mathbb{N}}$ が存在する。

1. $\mathrm{U} = \bigcup_{\mathrm{k}\in\mathbb{N}}(\mathrm{c_k} - \mathrm{r_k}, \mathrm{c_k} + \mathrm{r_k})$ が全ての計算可能実数を含む。
2. U の測度が $\lambda(\mathrm{U}) \leq 2^{-\mathrm{N}}$ である。

簡単のため $\mathrm{N} = 1$ の場合だけを証明する。したがって、測度が $\frac{1}{2}$ 未満である列が存在することを証明する。

補題3.7の証明

- 全てのチューリング機械 $M_1, M_2, \ldots,$ と実行時間 $t = 0, 1, \ldots$ を数え上げる。
- $i = \langle k, t \rangle$ とする。
- 機械 M_k と実行時間 t に対して、$M_k(k+4)$ が丁度 t ステップ（$t-1$ ステップではない）で停止して、dyadic の有理数（のエンコーディング）を出力するかどうかをチェックする。
- No の場合は $c_i = 0$, $r_i = 2^{-(i+3)}$ にする。
- Yes の場合は $c_i = M_k(k+4)$ and $r_i = 2^{-(k+3)}$ にする。
- M が計算可能実数 x を計算したら、$x \in (c_i - r_i, c_i + r_i)$
- 全ての k に対して多くても一つの t が Yes になる。
- したがって、$|U| \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-(i+2)} + \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-(k+2)} = 0.5$。

微分が計算不能

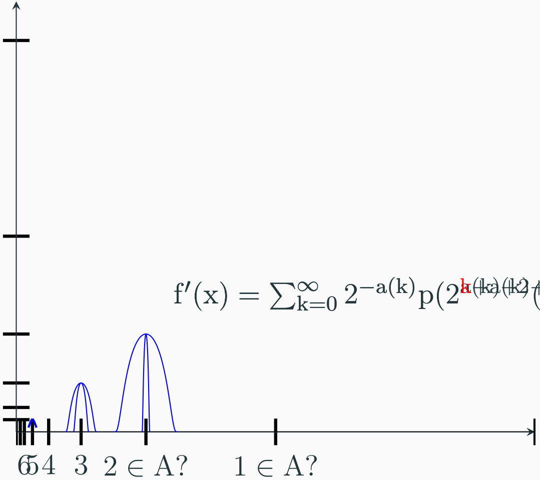
定理 3.8 (Myhill, 1976)

f' が計算不能な連続的微分可能な関数 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ が存在する。.

上のような $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ が存在することを証明するため, まず計算不能の $f' : [0, 1] \to \mathbb{R}$ を作り、f' の積分 $f(x) = \int_0^x f'(u)\,du$ が計算可能であることを証明する。

3.8の証明（大筋）

$A \subseteq \mathbb{N}$ が決定不能 r.e. 集合、$a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が A の数え上げ



$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-a(k)} p(2^{k+a(k)+2}(x - 2^{-k}))$$

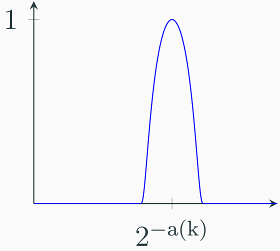
- f' を以下のように定義する。
- $A \subseteq \mathbb{N}$ を決定不能の r.e. 集合、$a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を A を数え上げる関数とする。
- p を定義3.6のパルス関数とする。
- 実関数 $p_k(x)$ を以下のように定義する。

$$p_k(x) = p(2^{k+a(k)+2} \cdot (x - 2^{-a(k)})).$$

- 全ての p_k が計算可能の関数の合成であるため、計算可能である。

3.8の証明（２）

- $\mathrm{supp}\ p_k = (2^{-a(k)} - 2^{-(k+a(k)+2)}, 2^{-a(k)} + 2^{-(k+a(k)+2)})$.



- $k \neq j \to \mathrm{supp}\, p_k \cap \mathrm{supp}\, p_j = \emptyset$
- $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-a(k)} p_k(x)$ とする。
- また、$f'_m(x) = \sum_{k=0}^{m} 2^{-a(k)} p_k(x)$ とする。
- 全ての $m \in \mathbb{N}$ に対して、f'_m が計算可能実関数（$\to$ 連続）である。

3.8の証明（３）

- $\forall x, |f'_m(x) - f'(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} 2^{-a(k)}$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists M, \forall m \geq M, \forall x, |f'_m(x) - f'(x)| < \varepsilon$
  $\Rightarrow (f'_m)_{m \in \mathbb{N}}$ が f' に一様収束する。
- したがって、f' が連続である。
- 次は f' が計算不能であることを証明する。
- 全ての $i \in \mathbb{N}$ に対して以下の性質がある。

$$f'(2^{-i}) = \begin{cases} 2^{-i} & \text{if } i \in A, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- $f'(2^{-i})$ の近似から $i \in A$ が決定できる。矛盾！
- したがって、f' が計算不能であることが分かる。

- 最後に積分 f が計算可能であることを証明する。

$$f(x) = \int_0^x f'(u)\,du = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-a(k)} p_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x 2^{-a(k)} p_k(x)$$

- $P_k(x) = \int_0^x 2^{-a(k)} p_k(x)$ とする。
- 全ての k に対して $P_k(x)$ が計算可能である。
- 全ての $N \in \mathbb{N}$ に対して、$\sum_{k=0}^{N} P_k$ が計算可能である。
- さらに、$0 \le P_k(x) \le 2^{-a(k)} \cdot (2 \cdot 2^{-(k+a(k)+2)}) \le 2^{-k}$ がある。
- したがって、$f(x)$ を 2^{-n} 近似するために、$\sum_{k=0}^{n} P_k$ を計算することが十分である。

注意 3.9

証明に作られている関数が２回微分可能であるが、f'' が連続ではない。

定理 3.10

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ が連続的微分可能な計算可能実関数とする。

微分関数 $f' : [0,1] \to \mathbb{R}$ が計算可能 $\iff$ f' の計算可能な連続率 $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在する。

系 3.11

- $k \in \mathbb{N}$ に対して、$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ が $(k+1)$ 回連続的微分可能（$f \in C^{k+1}([0,1])$）の時、全ての微分関数 $f', f'', \ldots, f^{(k)} : [0,1] \to \mathbb{R}$ が計算可能実関数である。
- 滑らかな実関数 $f \in C^{\infty}([0,1])$ が計算可能の時、全ての微分関数 $f^{(i)} : [0,1] \to \mathbb{R}$ が計算可能である。

系3.11の証明

- $k = 1$ の場合だけを証明する、$k > 1$ の場合は帰納法によって導かれる。
- $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ が計算可能実数、$f''[0, 1] \to \mathbb{R}$ が存在し連続であるとする。
- 全ての $x \in [0, 1]$ に対して、$f''(x) \leq M$ を満たす $M \in \mathbb{N}$ が存在する。
- 平均値の定理により

$$\left|f'(x) - f'(y)\right| \leq M\left|x - y\right| \text{ for all } x, y \in [0, 1].$$

- つまり f' がリプシッツ連続であり、計算可能な連続率が存在する。

定理3.10の証明

- 全ての計算可能関数に計算可能の連続率がある。したがって、($\leftarrow$) の部分が成り立つ。
- 次 $\mathrm{f}:[0,1]\to\mathbb{R}$ が計算可能実関数、f' の計算可能な連続率 $\mu:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ があるとする。
- f' を近似する関数 $\Psi_{\mathrm{f}'}:\mathbb{D}\times\mathbb{N}\to\mathbb{D}$ が存在することを証明する。
- ある $\mathrm{h}\in\mathbb{D}$ に対して、$\Psi_{\mathrm{f}'}(\mathrm{d},\mathrm{n})=\frac{\mathrm{f}(\mathrm{d}+\mathrm{h})-\mathrm{f}(\mathrm{d})}{\mathrm{h}}$ とする。h は以下に決める。
- 平均値の定理により全ての h とある $\xi\in[\mathrm{d},\mathrm{d}+\mathrm{h}]$ に対して、$\mathrm{f}'(\xi)=\frac{\mathrm{f}(\mathrm{d}+\mathrm{h})-\mathrm{f}(\mathrm{d})}{\mathrm{h}}$ が成り立つ。
- $\mathrm{h}=2^{-\mu(\mathrm{n}+1)}$ にするとき、$|\mathrm{f}'(\mathrm{d})-\mathrm{f}'(\xi)|\leq 2^{-(\mathrm{n}+1)}$ がある。

計算可能な作用素

- 授業の前半は以下のような不均一（nonuniform）な命題を見ました。

$$\mathrm{f}\text{が計算可能実関数の時、}\int \mathrm{f}\text{も計算可能実関数}$$

- ただし、それは f の入力で $\int$ f を出力する「プログラム」と違う。
- そのような計算をするため、関数 f のエンコーディングが必要。
- したがって、C([0, 1]) の表現を定義したい。

連続実関数の表現

連続率

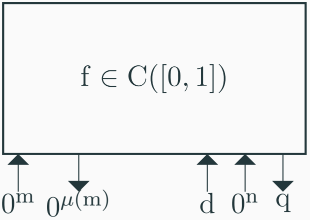
$$|x - y| \leq 2^{-\mu(n)} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 2^{-n}$$

定義 3.12 ($\delta_\square$ 表現)

$C([0,1])$ の $\delta_\square$ 表現は以

たす $< \mu, \psi >$ が $f \in C([0,1])$ の $\delta_\square$ 名前である。

- 全ての $d \in \mathbb{D} \cap [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ に対して、$|\psi(d,n) - f(d)| \leq 2^{-n}$。
- μ が f の連続率である。



計算可能な作用素

- 汎函数 $\mathrm{F} : \mathrm{C}([0,1]) \to \mathbb{R}$ が $(\delta_{\square}, \delta_{\mathrm{C}})$ 計算可能のとき, F が計算可能と呼ぶ。
- 作用素 $\mathrm{G} : \mathrm{C}([0,1]) \to \mathrm{C}([0,1])$ が $(\delta_{\square}, \delta_{\square})$ 計算可能の時、G を計算可能と呼ぶ。
- 高次元などの一般化は明らかな方法で行われる。
- 不均一な命題：f が計算可能実数のとき、F(f) が計算可能実数（または G(f) が計算可能実関数）である。
- 一な命題はそれより強い。F(G) が計算可能であれば、F(f)(G(f)) が計算可能。
- 不均一な命題を均一な命題に直接換える時もあるが、証明を変更しないといけないまたは均一な命題が成り立たない場合もある。

計算可能な作用素の例

演習問題 13

以下の汎函数/作用素が全て計算可能であることを証明せよ。

1. 関数適用 $\mathrm{C}([0,1]) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (\mathrm{f}, \mathrm{x}) \mapsto \mathrm{f}(\mathrm{x})$
2. 関数の加算 $\mathrm{C}([0,1] \times \mathrm{C}([0,1]) \to \mathrm{C}([0,1]),\ (\mathrm{f}, \mathrm{g}) \mapsto \mathrm{f} + \mathrm{g}$。ここは $(\mathrm{f} + \mathrm{g})(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x}) + \mathrm{g}(\mathrm{x})$
3. 最小値 $\mathrm{C}([0,1]) \to \mathbb{R},\ \mathrm{f} \mapsto \min\{\mathrm{f}(\mathrm{x}) \mid \mathrm{x} \in [0,1]\}$
4. 積分 $\mathrm{C}([0,1]) \to \mathrm{C}([0,1]), \mathrm{f} \mapsto (\mathrm{x} \mapsto \int_0^{\mathrm{x}} \mathrm{f}(\mathrm{y})\mathrm{d}\mathrm{y})$

中間値の定理

全ての零点が計算不能実数である $f \in C^\infty([0,1]$ が存在する

$\rightarrow$ 計算可能な零点の汎函数が存在しない。ただし、以下の時は計算可能な零点が存在する。

定理 3.13

計算可能実数 $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ が $f(0) \cdot f(1) < 0$ を満たすとき、$f(x) = 0$ である計算可能実数 $x \in \mathbb{R}$ が存在する。

証明のポイント.

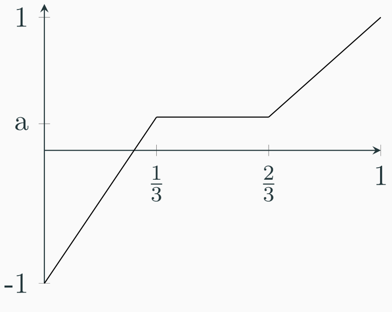
- $f(x) = 0$ を満たす有理数$x \in \mathbb{Q}$ が存在する時、x が計算可能（全ての有理数が計算可能だから)。
- f は有理数の零点がない時、二分法で零点を探すことができる。

$\square$

上の証明は直接一般化できない。下の定理による、最も一般なバーションが成り立たない。

定理 3.14

$Z(f) \in f^{-1}(\{0\})$、$\mathrm{dom}(Z) = \{f \in C([0,1]) \mid f(0) \cdot f(1) < 0\}$ を満たす計算可能な（連続な）多価汎函数 $Z :\subseteq C([0,1]) \rightrightarrows \mathbb{R}$ が存在しない。



計算可能な中間値の定理

零点が一つしかない場合は定理3.13を一般化できる。

定理 3.15

$\mathrm{Z_u} : \mathrm{C}([0,1]) \to \mathbb{R}$ を以下のように定義する。

- $\operatorname{dom} \mathrm{Z_u} = \{\mathrm{f} \in \mathrm{C}([0,1]) \mid \mathrm{f}(0) \cdot \mathrm{f}(1) < 0 \wedge \left|\mathrm{f}^{-1}(0)\right| = 1\}$
- $\mathrm{Z_u}(\mathrm{f}) = \mathrm{x}$ の時、$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = 0$

定理3.15の証明

- 二分法ができないため、代わりに三分法（trisection）を利用する。
- $a_0 = 0$、$d_0 = 1$ とする。
- $d_i - a_i \leq (\frac{2}{3})^i$ と $f(a_i) \cdot f(d_i) < 0$ を満たす $a_i, d_i \in [0, 1]$ を計算したとする。
- 同時に $f(a_i) \cdot f(a_i + \frac{2}{3}(d_i - a_i))$ と $f(d_i) \cdot f(a_i + \frac{1}{3}(d_i - a_i))$ の近似を計算する。
- 少なくても、一つがゼロではないので、
- 上のように長さ $(\frac{2}{3})^i$ の区間列を定義する。
- その区間列が f の零点に収束する。

一般化

実は、以下のようにさらにさらに一般化できる。

定理 3.16

以下を満たす計算可能な多価関数 $\mathrm{Z}_0 : \mathrm{C}([0,1]) \rightrightarrows \mathbb{R}$ が存在する。

- $\mathrm{dom}\,\mathrm{Z}_0 = \{\mathrm{f} \in \mathrm{C}([0,1]) \mid \mathrm{f}(0) \cdot \mathrm{f}(1) < 0 \wedge \mathrm{f}^{-1}(\{0\})$に区間が含まない$\}$
- $\mathrm{x} \in \mathrm{Z}_0(\mathrm{f})$ のとき、$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = 0$