実関数の計算可能性・計算量
4. 実数と実関数における計算量

ティース　ホルガー
京都大学大学院人間環境学研究科

数学基礎論サマースクール 2023

目次

計算量入門

- 計算量理論の目標は、計算に必要な資源（主に時間と空間と空間）の大きさによって問題を分類することである。
- そのため、おおよそ同じ複雑性を持つ問題は計算量のクラスに分割し、そのクラスの関係を調べる。
- まずは実数ではなく、決定問題 $\mathrm{A} \subseteq \Sigma^*$ の場合を見る。
- 決定可能な問題が効率的に解けるかを調べたい。
- チューリング機械モデルを使う。チューリング機械 M が全ての $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$ を受理し、$\mathrm{x} \notin \mathrm{A}$ を否定するとき、M が A を決定するという。

$x \in \Sigma^*$ に対して、$|x|$ が x の長さ（文字の数）とする。

定義 4.1 (チューリング機械の実行時間)

- $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$、M をチューリング機械とする。全ての入力 $x \in \Sigma^*$ に対して M が停止し、遷移の回数が $T(|x|)$ 以下である時、M が $T(n)$ 時間限定であるという。
- $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$、M をチューリング機械とする。全ての入力 $x \in \Sigma^*$ に対して M が停止し、停止した時 M が $S(|x|)$ 個以下の欄しか訪れていないとき、M が T 空間限定であるという。

決定性計算量クラス

定義 4.2

$\mathrm{A} \subseteq \Sigma^*, \mathrm{T}, \mathrm{S} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ とする。

- A を決定する $\mathcal{O}(\mathrm{T}(\mathrm{n}))$ 時間限定なチューリング機械が存在すると $\mathrm{A} \in \mathrm{DTIME}[\mathrm{T}(\mathrm{n})]$ という。
- A を決定する $\mathcal{O}(\mathrm{S}(\mathrm{n}))$ 空間限定なチューリング機械が存在すると $\mathrm{A} \in \mathrm{DSPACE}[\mathrm{S}(\mathrm{n})]$ という。
- $\mathrm{P} = \bigcup_{\mathrm{k} \in \mathbb{N}} \mathrm{DTIME}[\mathrm{n}^{\mathrm{k}}]$ とする。
- $\mathrm{PSPACE} = \bigcup_{\mathrm{k} \in \mathbb{N}} \mathrm{DSPACE}[\mathrm{n}^{\mathrm{k}}]$ とする。
- $\mathrm{EXP} = \bigcup_{\mathrm{k} \in \mathbb{N}} \mathrm{DTIME}[2^{\mathrm{n}^{\mathrm{k}}}]$ とする。

関数問題 $\mathrm{f} : \Sigma^* \to \Sigma^*$ のクラス FP なども同様に定義できる。

なぜ多項式時間に興味ある

- クラス P が効率的に解を求めることができる問題だと言われる。
- DTIME[n^2] などは計算モデルの細かな定義に多少変わるけど、P などのクラスは自然だと思われるモデルで安定している。
- 例えば、k 本テープのチューリング機械は t(n) で止まるとき、同じ計算をする $t(n)^2$ 時間で止まる機械がある。
- 多項式時間計算可能な関数の合成が多項式時間計算可能である。
- つまり、P などのクラスがロバストである。

SAT

定義 4.3

命題論理の式は帰納的に次のように定義される。

- 全ての $\mathrm{i} \in \mathbb{N}$ に対して、変数 $\mathrm{X_i}$ が命題論理の式である。
- ψ, ϕ が命題論理の式である時、$\psi \land \phi$, $\psi \lor \phi$,$\neg\phi$ が命題論理の式である。

充足可能性問題（SAT）とは、一つの命題論理式が与えられたとき、その式を真にする変数の値を定めることができるか、という問題。

例 4.4

- $(\neg \mathrm{X}_1 \lor \mathrm{X}_2) \land (\neg \mathrm{X}_2 \lor \mathrm{X}_3) \land (\mathrm{X}_1 \lor \neg \mathrm{X}_3 \lor \mathrm{X}_2) \in \mathrm{SAT}$
- $(\mathrm{X}_1 \lor (\mathrm{X}_2 \land \mathrm{X}_3)) \land (\neg(\mathrm{X}_1 \lor \mathrm{X}_3)) \notin \mathrm{SAT}$

演習問題 15

変数 X_i、または変数の否定 $\neg X_i$ をリテラルと呼ぶ。l_{ij} がリテラルの時、以下の形式にした式が連言標準形（conjunctive normal form, CNF) と呼ぶ。

$$\bigwedge_i \bigvee_j l_{ij}$$

内側の選言を節と呼ぶ。

2-SAT という問題は、命題論理式が連言標準形であり全ての節でリテラルが高々 2 つの SAT 問題です。2-SAT が多項式時間で決定できることを証明せよ。

NP は多項式時間検証可能の問題のクラス。

定義 4.5

$A \in NP$ であるとは、次の性質を満たす $B \in P$ と多項式 $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在することという。

$$x \in A \iff \exists y \in \Sigma^{p(|x|)} \ \langle x, y \rangle \in B.$$

補題 4.6

$\mathrm{P} \neq \mathrm{EXP}$

演習問題 16

$\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{EXP}$ を証明せよ。

$\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ 予想は理論計算機科学上の未解決問題の中で最も重要な問題の一つであり。

定義 4.7

$A, B \subseteq \Sigma^*$ とする。次の性質を満たす多項式時間で計算可能な関数 $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ が存在するとき、A は B に多項式時間帰着可能であるといい、$A \leq_P B$ と書く。

$$\forall x, x \in A \leftrightarrow f(x) \in B$$

演習問題 17

以下を証明せよ。

1. 関係 $\leq_P$ が反射的と推移的である。
2. $A \leq_P B$ と $B \in P$ のとき $A \in P$ が成り立つ。

定義 4.8

$A \subseteq \Sigma^*$ とする。

1. 全ての $B \in \mathrm{NP}$ に対して、$B \le_{\mathrm{P}} A$ が成り立つとき、A が NP 困難という。
2. さらに $A \in \mathrm{NP}$ のとき、A が NP 完全という。

定理 4.9 (Cook-Levin の定理)

充足可能性問題（SAT）が NP 完全である。

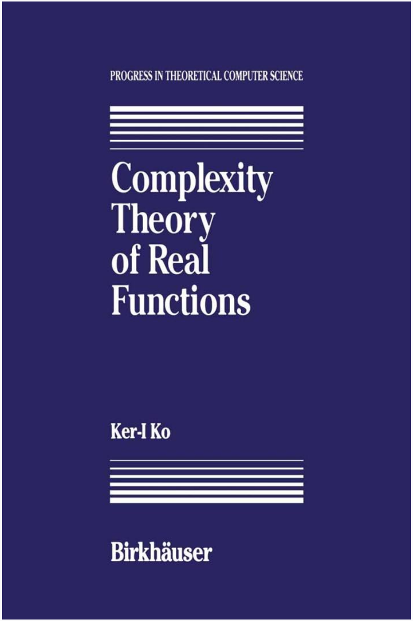
演習問題 18

$$\mathrm{SAT} \le_{\mathrm{P}} \text{3-SAT}$$

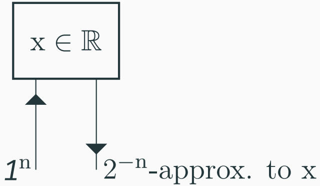
を証明せよ。つまり、3-SAT が NP 完全である。

実数と実関数における計算量

Complexity Theory of Real Functions



多項式時間で計算可能な実数



- 計算可能性の定義は直接計算量に一般化できる。
- $x \in \mathbb{R}$ が多項式時間で計算可能の名前を持つとき、x を多項式計算可能実数と呼ぶ、$x \in \mathbb{R}_P$ も書く。

例 4.10

円周率 π が多項式計算可能実数である。

証明の大筋.

以下の Bailey-Borwein-Plouffe 式を利用すると π の近似が計算できる。

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right) \right]$$

初項から第 N 項の総和だけを使うとき、誤差が 16^{-n} より小さくである。 □

例

演習問題 19

オイラーの定数 e が多項式計算可能実数であることを証明せよ。

演習問題 20

計算可能であるが、多項式時間で計算できない $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$ を定義せよ。

多項式計算可能実数の性質

定理 4.11

$x, y \in \mathbb{R}_P$ である時、$x + y, x - y, x \cdot y \in \mathbb{R}_P$ が成り立つ。さらに、$x \neq 0$ の時、$\frac{1}{x} \in \mathbb{R}_P$ が成り立つ。

定理 4.12

多項式 $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ の係数 $a_0, \ldots, a_n$ が全て多項式時間で計算可能の時、p の零点が多項式時間で計算可能。

証明: 計算可能性の証明で作った機械は多項式時間限定である。

系 4.13

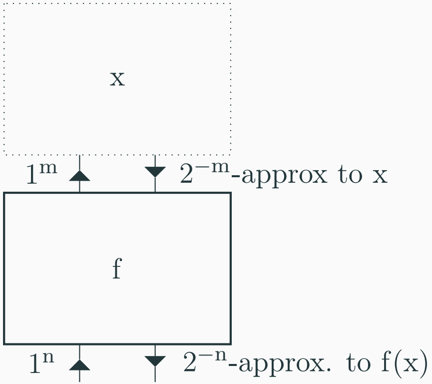
全ての代数的数が多項式時間計算可能である。

系 4.14

多項式時間計算可能実数が実閉体である。

実関数の計算量

実関数の計算モデルは神託機械である。



神託機械の実行時間

- 神託機械の実行時間は普通のチューリング機械と殆ど同じ。
- 神託を呼ぶときは一つのステップしか使わない（神託が出力を書くのは時間かからない）。
- ただし、神託の質問を書くと出力を読むことは時間かかる。
- $\mathrm{t} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ とする。$\mathrm{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ に f を計算する全ての $\mathrm{x} \in [0,1]$ と $\varphi \in \delta_{\mathrm{C}}^{-1}(\mathrm{x})$ に対して最大 $\mathrm{t}(\mathrm{n})$ の遷移で $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ の $2^{-\mathrm{n}}$ 近似を出力する神託機械が存在するとき、f を t 時間限定計算可能と呼ぶ。

演習問題 21

以下を証明せよ。

- $+ : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, $\times : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ が多項式時間計算可能であること。
- $\mathrm{exp} : [0,1] \to \mathbb{R}, \mathrm{x} \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$ が多項式時間計算可能である。
- $\mathrm{f} : [0,1] \to [0,1], \mathrm{g} : [0,1] \to \mathbb{R}$ が多項式時間計算可能の時、$\mathrm{g} \circ \mathrm{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ が多項式時間計算可能である。

定理 4.15

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ が計算可能とする。f を計算する時間 $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 限定の神託機械がある時、$n \mapsto t(n+2)$ が f の連続率である。

- f を計算する神託機械が 2^{-n} 近似を出すための時間が $t(n)$ で制限されている。
- 神託から x の $2^{-t(n)}$ より正確な近似が求められない。
- 定理 2.10 のように神託機械から連続率 μ を作ると $\mu(n) \leq t(n+2)$ が成り立つ。

系 4.16

$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ が多項式時間で計算可能が以下の性質と同値である。

次の条件を満たす二つの多項式関数 $\mu, q : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ と関数 $\psi : \mathbb{D} \cap [0, 1] \times \mathbb{N} \to \mathbb{D}$ が存在する。

1. μ が f の連続率である。
2. 全ての $d \in \mathbb{D}_{[0,1]}, n \in \mathbb{N}$ に対して、$|\psi(d, n) - f(d)| \leq 2^{-n}$ がある。
3. $\psi(d, n)$ は $q(|d| + n)$ 時間限定で計算可能である。

演習問題 22

多項式時間で計算できない計算可能実関数 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ を作れ。

演習問題 23

$f : [0, 1] \to [0, 1]$ が多項式時間で計算可能な全単射とする。以下を証明せよ。

- 逆関数 $f^{-1} : [0, 1] \to [0, 1]$ が計算可能である。
- f^{-1} が多項式計算で計算できない例を作れ。
- f^{-1} に多項式な連続率がある時、f^{-1} が多項式時間で計算可能である。

作用素の計算困難性

定理 4.17 (Ko, Friedman (1984))

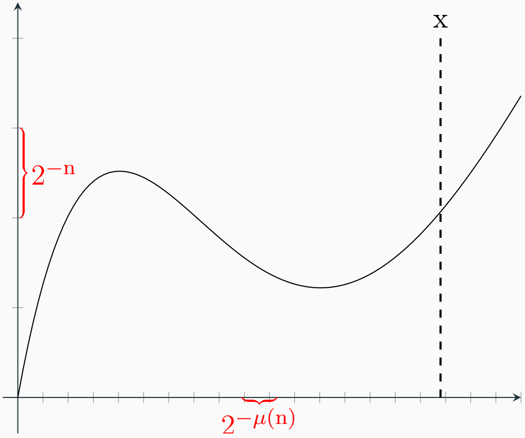
以下が同値である。

1. $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$
2. 全ての多項式時間計算可能実関数 $\mathrm{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ に対して、最大値の関数 $\mathrm{m_f(x)} = \max\{\mathrm{f(y)} \mid \mathrm{y} \in [0,1]\}$ が多項式時間計算可能。

定理4.17($\Rightarrow$) の証明（１）

- $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ が多項式時間計算可能実関数とする。
- $P = NP$ のとき m_f も多項式時間計算可能実関数であることを証明する。
- $f : [0, 1] \to [0, 1]$ の場合だけを見るのが十分。
- 系4.16により、f に多項式の連続率 $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ と多項式時間計算可能な近似関数 $\Psi : \mathbb{D} \times \mathbb{N} \to \mathbb{D}$ が存在する。
- m_f が計算可能であることの証明を思い出そう。

定理4.17($\Rightarrow$) の証明（２）



注意 4.18

$\mu(n)$ が多項式のため上のアルゴリズムは指数時間で止まる。

定理4.17($\Rightarrow$) の証明（３）

- $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$ の時 $\mathrm{m_f}$ は多項式時間で計算できることを証明する。
- まず、μ が $\mathrm{m_f}$ の連続率でもあるため、$\mathrm{m_f}$ を $\mathrm{d} \in \mathbb{D}, \mathrm{n} \in \mathbb{N}$ に対して $\mathrm{poly}(|\mathrm{d}| + \mathrm{n})$ 時間で計算できることを証明するのが十分（系4.16）。
- 以下のように離散的な問題 $\mathrm{A} \subseteq \Sigma^*$ を定義する。
- $\mathrm{d}, \mathrm{e} \in \Sigma^*$ が以下の条件を満たすとき $\langle \mathrm{d}, \mathrm{e} \rangle \in \mathrm{A}$ とする。
    - $\mathrm{e} \in \mathbb{D}_\mathrm{n} \cap [0, 1], \mathrm{d} \in \mathbb{D}_{\mu(\mathrm{n}+1)}$ for some n,
    - $\exists \mathrm{d}' \in \mathbb{D}_{\mu(\mathrm{n}+1)} \cap [0, 1],\ \mathrm{d}' \leq \mathrm{d} \wedge \Psi(\mathrm{d}', \mathrm{n}+1) \geq \mathrm{e}.$
- NP の定義を思い出そう：
$\mathrm{x} \in \mathrm{A} \iff \exists \mathrm{y} \in \Sigma^{\mathrm{p}(|\mathrm{x}|)}\ \langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle \in \mathrm{B}$ (B 多項式時間計算可能)
- $\mathrm{A} \in \mathrm{NP}$

定理4.17($\Rightarrow$) の証明（４）

- $d, e \in \Sigma^*$ が以下の条件を満たすとき $\langle d, e \rangle \in A$ とする。
    - $e \in \mathbb{D}_n \cap [0,1]$, $d \in \mathbb{D}_{\mu(n+1)}$ for some n,
    - $\exists d' \in \mathbb{D}_{\mu(n+1)} \cap [0,1],\ d' \le d \land \Psi(d', n+1) \ge e.$
- $\langle d, e \rangle \in A \to e \le m_f(d) + 2^{-n}$
- $n \in \mathbb{N}$ と $d \in \mathbb{D}_{\mu(n+1)} \cap [0,1]$ を固定する。
- A を使って $m_f(d)$ を近似できることを証明する。
- $e = \max\{e' \in \mathbb{D}_n \cap [0,1] \mid \langle d, e' \rangle \in A\}$ にする。
- 次、$|e - m_f(d)| \le 2^{-n}$ を証明する。
- $m_f(d) = f(y)$ を満たす $y \in [0, d]$ が存在する。
- また、$|y - d'| \le 2^{-\mu(n+1)}$ を満たす $d' \in \mathbb{D}_{\mu(n+1)} \cap [0,1]$ が存在する。
- つまり、$e \ge f(d') - 2^{-(n+1)} \ge f(y) - 2^{-n} = m_f(d) - 2^{-n}.$

定理4.17($\Rightarrow$) の証明（４）

- $\mathrm{d}, \mathrm{e} \in \Sigma^*$ が以下の条件を満たすとき $\langle \mathrm{d}, \mathrm{e} \rangle \in \mathrm{A}$ とする。
  - $\mathrm{e} \in \mathbb{D}_\mathrm{n} \cap [0, 1],\ \mathrm{d} \in \mathbb{D}_{\mu(\mathrm{n}+1)}$ for some n,
  - $\exists \mathrm{d}' \in \mathbb{D}_{\mu(\mathrm{n}+1)} \cap [0, 1],\ \mathrm{d}' \leq \mathrm{d} \wedge \Psi(\mathrm{d}', \mathrm{n}+1) \geq \mathrm{e}.$
- $\mathrm{e} = \max\{\mathrm{e}' \in \mathbb{D}_\mathrm{n} \cap [0, 1] \mid \langle \mathrm{d}, \mathrm{e}' \rangle \in \mathrm{A}\}$ にする。
- $|\mathrm{e} - \mathrm{m_f}(\mathrm{d})| \leq 2^{-\mathrm{n}}$ が成り立つ。

- 最後は e を多項式時間で計算できることを証明する。
- $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$ を仮定したから、$\mathrm{A} \in \mathrm{P}$。
- $0 \leq \mathrm{e} \leq 1$ と $\mathrm{e} \in \mathbb{D}_\mathrm{n}$ のため、二分探索で多項式時間で e を計算できる。
- つまり、$\mathrm{P} = \mathrm{NP}$ の時 $\mathrm{m_f}$ が多項式時間計算可能である。

定理4.17($\Leftarrow$) の証明の大筋（１）

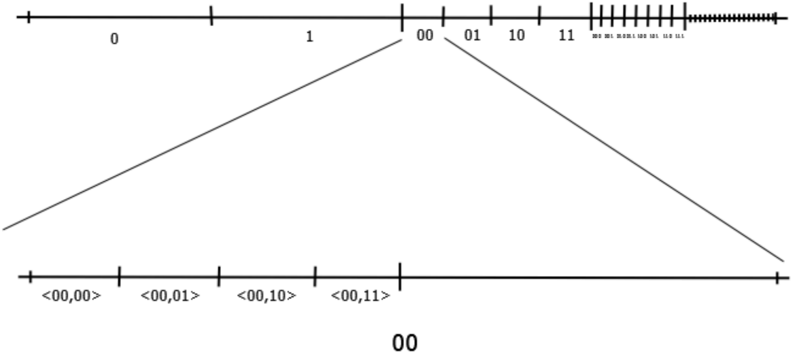
- 次は全ての f に対して m_f が多項式計算可能の時、$P = NP$ を証明する。
- $A \in NP$ とする。
- $n \in \mathbb{N}, s \in \Sigma^n$ に対して、以下を満たす $B \in P$ と多項式 $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在する

$$s \in A \iff \exists t \in \Sigma^{p(n)} \langle s, t \rangle \in B.$$

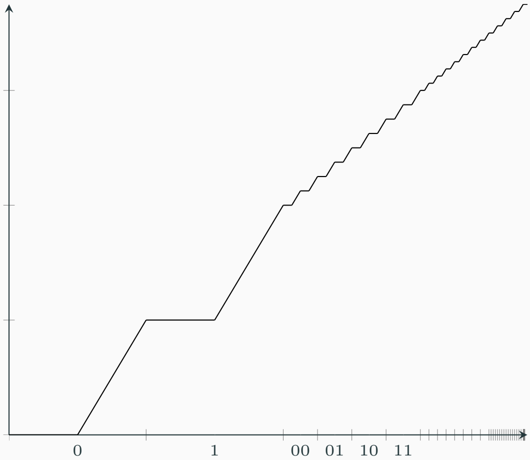
- B を使って、$m_f \in P \to A \in P$ を満たす多項式計算可能実関数 $f \in C^\infty([0,1])$ を作る。
- そのため、$[0,1]$ を無限の区間に分割する。
- 全ての区間がある $n \in \mathbb{N}, (s,t) \in \Sigma^n \times \Sigma^{p(n)}$ と対応する。

区間の分割

- まず全ての $s \in \Sigma^*$ にサイズ $2^{-2|s|}$ の区間 I_s を割り当てる。
- I_s を区間 I_{s_l} と I_{s_r} に二等分する。
- I_{s_l} をさらに $p(n)$ の区間に等分する、全ての $t \in \Sigma^{p(n)}$ を割り当てる。
- s, t の subinterval を $I_{s,t}$ とかく。



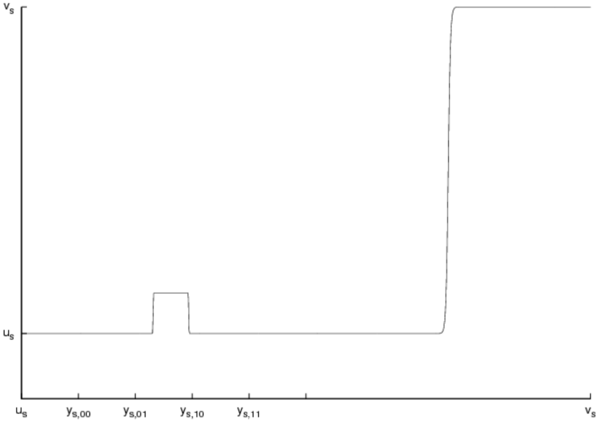
定理4.17($\Leftarrow$) の証明の大筋（２）



$$I_s = [u_s, v_s], |I_s| = 2^{-2|s|}$$

定理4.17($\Leftarrow$) の証明の大筋（３）

$\langle s, t\rangle \in B$ のとき、$I_{s,t}$ に高さ $|I_{s,t}|$ の山を置く。



前のように $f \in C^\infty([0,1])$ をできる（詳細は省略する）。また、f の構成に使ってる関数は全て多項式計算可能なように選べる。

定理4.17($\Leftarrow$) の証明の大筋（4）

- $s, t \in \Sigma^*$、$n = |s|$ とする。
- $|I_{s,t}| = 2^{-(p(n)+2n+1)}$ である。
- f が多項式時間計算可能であることを証明する。
- f の構成に使った関数が全て多項式時間計算可能であるため、f も多項式の連続率がある。
- $n \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{D}$ に対して $f(d)$ の 2^{-n} 近似を多項式時間で計算する方法を示さないといけない。
- $a_n = 1 - 2^{-(n+1)}$ とするとき、$\forall x, y \in [a_n, 1]$, $|f(x) - f(y)| \leq 2^{-n}$。
- つまり、$d \in [a_n, 1]$ の時, $f(a_n)$ を計算するのが十分。
- $[0, a_n]$ の区間の数が $2^{n+p(n)+2}$ 以下である。
- $d \in I_{s,t}$ を満たす区間が二分探索で多項式時間で探せる。
- $\langle s, t\rangle \in B$ も多項式時間でチェックできる。
- その結果により、u_s か山の関数の値を出力できる。

定理4.17($\Leftarrow$) の証明の大筋（５）

- f が多項式計算可能実関数である。
- m_f が多項式時間計算可能の時、$A \in P$ を証明する。
- $s \in \Sigma^*, n = |s|$ とする。
- $s \in A$ を $poly(n)$ 時間限定で決定できることを証明する。
- $c_s = (u_s + v_s)/2$ が $poly(n)$ で計算できる。
- $s \notin A$ の場合 $g(c_s) = u_s$、$s \in A$ の場合 $g(c_s) = u_s + 2^{-(p(n)+2n+2)}$ である。
- つまり、$g(c_s)$ の $2^{-(p(n)+2n+4)}$ 近似がわかると、二つのケースを区別できる。

他のにてる結果

- 多項式時間計算可能 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ でも微分関数 $f' : [0, 1] \to \mathbb{R}$ が計算不能の場合がある。(Ko, 1983)
- 全ての多項式計算可能 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ に対して、$x \mapsto \int_0^x f(y)dy$ が多項式計算可能が $\mathrm{FP} = \#\mathcal{P}$ と同値。(Friedman, 1984)
- 全ての多項式時間計算可能とリプシッツ連続な $f : [0, 1] \times [-1, 1] \to \mathbb{R}$ に対して以下の初期値問題の解 y が多項式時間計算可能が $\mathrm{P} = \mathrm{PSPACE}$ と同値。(Kawamura, 2010)

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad ; \quad y(0) = 0.$$

解析関数

定義 4.19 (解析関数)

$f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ is analytic if for any $x_0 \in D$ the Taylor-series

$$T(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

converges to $f(x)$ for x in a neighborhood of x_0.

定理 4.20 (Ko, Friedman (1987))

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ is polynomial time computable iff the power series $(a_m)_{m \in N}$ of f around 0 is.

系 4.21

解析関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ が多項式時間計算可能の時、微分 $f' : [0,1] \to \mathbb{R}$, 積分 $x \mapsto \int_0^x f(y)dy$、最大値の関数 $x \mapsto \max\{f(y) \| \ y \in [0,1]\}$ が全て多項式時間計算可能。

作用素の一様な計算可能性と計算量

連続実関数の表現

連続率

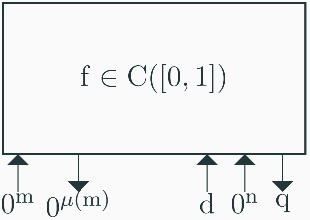
$$|x - y| \leq 2^{-\mu(n)} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 2^{-n}$$

定義 4.22 ($\delta_\square$ 表現)

$C([0,1])$ の $\delta_\square$ 表現は以

たす $<\mu, \psi>$ が $f \in C([0,1])$ の $\delta_\square$ 名前である。

- 全ての $d \in \mathbb{D} \cap [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ に対して、$|\psi(d,n) - f(d)| \leq 2^{-n}$。
- μ が f の連続率である。



計算可能な作用素

- 汎函数 $\mathrm{F} : \mathrm{C}([0,1]) \to \mathbb{R}$ が $(\delta_{\square}, \delta_{\mathrm{C}})$ 計算可能のとき, F が計算可能と呼ぶ。
- 作用素 $\mathrm{G} : \mathrm{C}([0,1]) \to \mathrm{C}([0,1])$ が $(\delta_{\square}, \delta_{\square})$ 計算可能の時、G を計算可能と呼ぶ。
- 高次元などの一般化は明らかな方法で行われる。
- 不均一な命題：f が計算可能実数のとき、F(f) が計算可能実数（または G(f) が計算可能実関数）である。
- 一な命題はそれより強い。F(G) が計算可能であれば、F(f)(G(f)) が計算可能。
- 不均一な命題を均一な命題に直接換える時もあるが、証明を変更しないといけないまたは均一な命題が成り立たない場合もある。

計算可能な作用素の例

定理 4.23

関数適用 $\mathrm{Eval} : \mathrm{C}([0,1]) \times [0,1] \to \mathbb{R},\ (\mathrm{f}, \mathrm{x}) \mapsto \mathrm{f}(\mathrm{x})$ が計算可能。

証明：f の神託から $\mathrm{m} = \mu(\mathrm{n}+1)$ をもらい、x の神託から x の $2^{-\mathrm{m}}$ 近似をもらい、f の神託から $\mathrm{m} = \Psi(\mathrm{d}, \mathrm{n}+1)$ をもらって。

演習問題 24

以下の汎函数/作用素が全て計算可能であることを証明せよ。

1. 関数の加算 $\mathrm{C}([0,1] \times \mathrm{C}([0,1]) \to \mathrm{C}([0,1]),\ (\mathrm{f}, \mathrm{g}) \mapsto \mathrm{f} + \mathrm{g}$。ここは $(\mathrm{f}+\mathrm{g})(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x}) + \mathrm{g}(\mathrm{x})$
2. 最小値 $\mathrm{C}([0,1]) \to \mathbb{R},\ \mathrm{f} \mapsto \min\{\mathrm{f}(\mathrm{x}) \mid \mathrm{x} \in [0,1]\}$
3. 積分 $\mathrm{C}([0,1]) \to \mathrm{C}([0,1]), \mathrm{f} \mapsto (\mathrm{x} \mapsto \int_0^{\mathrm{x}} \mathrm{f}(\mathrm{y})\mathrm{dy})$

作用素の計算量

- $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ の時、計算量は神託に依存しないように定義した。
- ただし、$C([0,1])$ の場合はそれができない。
- EVAL の計算量は（何の表現を使っても）μ に依存する。
- 神託の入力は関数 $\varphi : \Sigma^* \to \Sigma^*$
- 関数の長さは何？

Second Order Polynomials

Polynomial in function $L : N \to N$ and $n \in N$.
Example: $P(L, n) = 2L(L(L(n)^4 + 2L(n)) + 2) + n + 10$

定義 4.2

- $|s| \leq$ ...
  空間...
- $|\varphi| : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を $|\varphi|(|s|) = |\varphi(s)|$ と定義する。
- $T : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ とする。神託機械 $M^?$ が T 時間限定のは全ての $\varphi \in \Sigma^* *, q \in \Sigma^*$ に対して $M^\varphi(q)$ の遷移の回数が $T(|q|, |\varphi|)$ 以下であること。
- $M^?$ が多項式時間とは $M^?$ が二階多項式 P に対して P 時間限定であること。

[KC12] A. Kawamura and S. Cook. Complexity theory for operators in analysis. ACM Transactions on Computation Theory 4, Article 5, 2012.

演習問題 25

$\mathrm{F}, \mathrm{G} : \Sigma^{**} \to \Sigma^{**}$ が多項式時間計算可能の時、$\mathrm{F} \circ \mathrm{G}$ も多項式時間計算可能であることを証明せよ。