Another relativization of Schnorr randomness and Computable randomness

Kenshi Miyabe

Sep 14 2009

マーティンレフランダム

ランダムとは何か？

0 と 1 の無限列を考える。
その列がランダムであるとはどういうことだろうか。
次のうちランダムな実数はどれでしょう？

- $0.00000000000000000000000000000000000000000000\cdots$
- $0.01010101010101010101010101010101010101010101\cdots$
- $0.10101011001010101001010101101010101000101100\cdots$

少なくとも「0 と 1 の比が 1:1」であろう。
しかし逆は成り立ちそうにない。

3 つのアプローチ

ランダムの理論では以下の 3 方向からアプローチする。

- わずかな実数しか持たないような特別な性質を持たない。
- 記述するのが難しい。
- 次の値を予想するのが難しい。

これらの適切な定式化が同値になることが知られている。
今回は 1 つ目の定式化の仕方を利用する。

カントール空間と測度

0 と 1 の無限列の集合をカントール空間と呼び、$2^\omega = \{0,1\}^\omega$ で表す。
有限列 σ に対して、$[\sigma] = \{Z \mid \sigma \preceq Z\}$ を σ のシリンダーと呼ぶ。
集合 $R \subseteq 2^\omega$ が、「R に含まれるシリンダーの和集合が R に等しい」を満たすとき、R は開集合であると言う。
自然数の集合 $S \subseteq \{0,1\}^*$ から作られる開集合を、

$$[S]^{\preceq} = \{X \in 2^\omega \mid (\exists y \in S) y \preceq X\}$$

で定義する。
測度 μ を $\mu([\sigma]) = 2^{-|\sigma|}$ から作られる測度とする。
カントール空間を $[0,1]$ の実数と同一視すれば、μ はルベーグ測度に (ほぼ) 一致する。

測度 *0* の集合

ランダムな列を「わずかな列しか持たないような特別な性質を持たない。」で定義したい。
「わずかな列」を「測度 0」と解釈すれば、「$X \in 2^\omega$ がランダム」を「すべての測度 0 の集合に含まれない。」で定義できる。
しかし、そんな列は存在しない。
そこで以下の事実に注目する。

命題 1. C が測度 *0* である $\iff$ 開集合の集まり $\{V_n\}$ があって $\mu(V_n) \leq 2^{-n}$ かつ $C \subseteq \bigcap_n V_n$

この V_n として計算可能なものだけを許すことにする。

計算可能性

ある自然数の集合に対して、任意の自然数が含まれているいるかどうかが計算機で判別可能なとき、計算可能であると言う。
含まれている自然数を列挙することができるとき、c.e.(計算可枚挙) であると言う。
開集合 V に対して、ある c.e. の集合 S があって $V = [S]^{\preceq}$ となるとき、c.e. であると言う。

定義 2 (マーティンレフ 1966). 一様に *c.e.* の開集合の列 $\{V_n\}$ が $mu(V_n) \leq 2^{-n}$ を満たす時、マーティンレフテスト と呼ぶ。
列 X が $X \notin \bigcap_n V_n$ となる時、X はこのテストを パスする と言う。
すべてのマーティンレフテストをパスする列を マーティンレフランダム であると言う。

万能マーティンレフテスト

c.e. の開集合の列は一つのマシンで数え上げることができるので、実は一つのマーティンレフテストだけを考えれば良い。

定義 3. マーティンレフテスト V_n が、任意のマーティンレフテスト U_n に対して、$\bigcap_n U_n \subseteq \bigcap_n V_n$ であるとき、万能 であると言う。

命題 4. 万能マーティンレフテストが存在する。

証明. e 番目のマーティンレフテスト U_n^e に対して、$V_n = \bigcup_e G_{n+e+1}^e$ とすれば良い。 □

命題 5. マーティンレフランダムな列の集合は測度 *1* を持つ。

証明. 万能マーティンレフテストをパスしない列の集合は測度 0 である。 □

ランダムな列として自然な性質

マーティンレフランダムは、ランダムな列として自然な性質を多く持つ。

命題 6. マーティンレフランダムの列の *0* と *1* の比は *1:1*。

命題 7. マーティンレフランンダムの列の最初の有限個を別のもので置き換えてもマーティンレフランダムである。

命題 8. マーティンレフランダムの列の集合は計算可能な並び替えで閉じている。

独立性定理

ランダムであれば、どの部分も他の部分の情報を持たないのが自然である。

定義 9. 一様に *c.e.* の開集合の列 V_n に、A をオラクルとしても利用することを許したものを、A マーティンレフテストと呼ぶ。すべての A マーティンレフテストをパスする列を A マーティンレフランダムと言う。

列 A と B をそれぞれ奇数番目と偶数番目に持つ列を $A \oplus B$ で表す。

定理 10 (独立性定理 **1987).** 列 $A \oplus B$ がマーティンレフランダムであることと、A がマーティンレフランダムかつ B が A マーティンレフランダムであることは同値。

シュノアランダム

シュノアの批判

シュノアはランダムの概念を定義するテストとして計算可能なものだけを許すべきだと主張した。

定義 11. 一様に *c.e.* な開集合の列 $\{V_n\}$ が $\mu(V_n) = 2^{-n}$ を満たすとき、$\{V_n\}$ を シュノアテスト と呼ぶ。
すべてのシュノアテストをパスする列を シュノアランダム と呼ぶ。

$\mu(V_n)$ が n に関して一様に計算可能で 0 に収束するとしても良い。
測度は計算可能であるが、計算可能な開集合である必要はない。

ランダムな列として自然な性質

シュノアランダムもまたランダムな列として自然な性質を持つ。

命題 12. シュノアランダムの列の集合は測度 *1* を持つ。

命題 13. シュノアランダムの列の *0* と *1* の比は *1:1*。

命題 14. シュノアランダムの列の最初の有限個を別のもので置き換えてもシュノアランダムである。

命題 15. シュノアランダムランダムの列の集合は計算可能な並び替えで閉じている。

万能シュノアテストは存在しない

シュノアランダムの研究は当初なかなか進まなかった。
以下の理由があげられる。

命題 16. 万能シュノアテストは存在しない。

証明. それぞれのシュノアテストは計算可能なので、そのテストをパスしない計算可能な列が存在する。 □

マーティンレフテストが列挙可能なのに対し、シュノアテストは列挙することはできない。
また、マーティンレフランダムのように、コルモゴロフ複雑性による同値な定義が最近まで見つからなかった。

独立性定理

最近、シュノアランダムは独立性定理が成り立たないことが示された。

定理 17. $A \oplus B$ はシュノアランダムだが、A は B シュノアランダムではないような A, B が存在する。*(マーケル、ミラー、ニース、リーマン、ステファン 2006)*

しかし、この逆は成り立つ。

定理 18. A がシュノアランダムで B が A シュノアランダムならば、$A \oplus B$ はシュノアランダムである。

そこで、どんな時に独立性定理が成り立たないのか調べられるようになった。

計算可能性による分類

自然数から自然数への関数 f, g に対して、f が g を圧倒する (dominate) とは、ほとんどすべての n に対して、$g(n) \leq f(n)$ となることを言う。
列 A が high であるとは、すべての計算可能な関数を圧倒する関数が A で計算可能な時に言う。

定理 19. A が *high* でないシュノアランダムな列ならば、マーティンレフランダムである。*(*ニース、ステファン、タージン *2005)*

当然、独立性定理が成り立たないのは high の部分であることが分かる。

シュノアランダムの別の相対化

独立性定理は成り立つべき

独立性定理は適切なランダムの概念かどうかの指標の一つである。
実際、マーティンレフランダムの他に、コルモゴロフラブランドランダムや、n ランダムなどは独立性定理が成り立つ。
シュノアランダムはランダムの概念として適切と思える性質をたくさん持っているにも関わらず、独立性定理が成り立たない。
しかも独立性定理が成り立たないのは計算能力の高い部分である。
これはシュノアランダムの相対化が適切でないことを示唆している。

独立性定理の証明の再検討

独立性定理の一方向が、マーティンレフランダムで成り立ち、シュノアランダムで成り立たない理由を探る。

定理 20. $A \oplus B$ がマーティンレフランダムならば、B は A マーティンレフランダムである。

証明. B が A マーティンレフランダムでないとしよう。
マーティンレフテスト V_n^A があって、$B \in \bigcap_n V_n^A$ である。
新たなマーティンレフテスト W_n を以下で定義する。

$$W_n = \{X \oplus Y \mid X \in 2^\omega, Y \in \widetilde{V}_n^X\}.$$

ここで $\widetilde{V}_n^X$ は V_n^X として測度が 2^{-n} を超えないようにしたものとする。
$\widetilde{V}_n^A = V_n^A$ であるから、$A \oplus B \in \cap_n W_n$。 □

独立性定理を成り立たせるには

上の証明がシュノアランダムで成り立たない理由は、

$$W_n = \{X \oplus Y \mid X \in 2^\omega, Y \in \widetilde{V}_n^X\}$$

において、この V_n^X がシュノアテストで模倣できないからである。模倣できるようにするために V_n に対して以下の制限を考える。

- すべての X に対して、V_n^X が X で計算可能なもの。
- V_n^X は X を使って良いが計算時間は計算可能な関数で抑えられるもの。

実はこの 2 つの制限は同値である。

相対化の解釈

普通、相対化は計算能力で考える。
これはランダムネスの理論が計算可能性の理論を基盤に作られているからであり、伝統的なものである。
シュノアランダムはテストとして計算可能なものに制限したという見方がされてきた。
独立性定理の観点からすれば、テストに対応するチューリングマシンを制限しているのだと解釈できる。
これは同時に、チューリングマシンとして適切な制限ならばそれぞれにランダムの概念が定義できる可能性があることを示唆している。

真理値表シュノアランダム

計算可能性の理論

Φ_e を e 番目のチューリングマシンとする。
列 A, B に対して、ある e があって $A = \Phi_e^B$ となるとき、A は B にチューリング還元可能であると言い、$A \leq_T B$ と書く。
特に、すべての Z に対して Φ_e^Z が定義されるとき、真理値表還元可能であると言い、$A \leq_{tt} B$ と書く。
この tt は truth-table(真理値表) を表している。

命題 21. $A \leq_{tt} B$ であることと $A = \Phi^B$ かつ $\Phi^B(n)$ を計算するために必要な時間が n に関して計算可能な関数で抑えられることは同値。

真理値表シュノアランダム

定義 22. *c.e.* 開集合の列 $\{V_n\}$ が一様に A に真理値表還元可能なマーティンレフテストであるとき、$\{V_n\}$ は A 真理値表シュノアテストであると言う。
すべての A 真理値表シュノアテストをパスする列を A 真理値表シュノアランダムと言う。

注意 23. 上の表現に合わせてシュノアテストを表現すると以下のようになる。
c.e. 開集合の列 $\{V_n\}$ が一様に A にチューリング還元可能なマーティンレフテストであるとき、$\{V_n\}$ は A シュノアテストであると言う。

命題 24. 任意の A に対して、A シュノアランダムならば A 真理値表シュノアランダム。

真理値表シュノアランダムとシュノアランダムは似ている

命題 25. A が計算可能な列の時、A シュノアランダムと A 真理値表シュノアランダムは一致する。

よって真理値表シュノアランダムはシュノアランダムの別の相対化になっていることが分かる。

命題 26. $A \leq_T B$ のとき、A は B シュノアランダムではない。
$A \leq_{tt} B$ のとき、A は B 真理値表シュノアランダムではない。

真理値表シュノアランダムの別の定義

マーティンレフランダムにはコルモゴロフ複雑性や c.e. マルチンゲールによる同値な表現があることが知られている。
シュノアランダムにも計算可能測度機械や計算可能マルチンゲールによって同値な表現が存在する。
真理値表シュノアランダムにも同値な表現になるように真理値表還元測度機械や真理値表還元マルチンゲールを定義することができるのは明らかであろう。
その他、シュノアランダムで成り立つ良い性質は、ほとんど真理値表シュノアランダムでも成り立つ。
また真理値表シュノアランダムにも万能真理値表シュノアテストは存在しない。

真理値表シュノアランダムの独立性定理

定理 27. 真理値表シュノアランダムでは独立性定理が成り立つ。

よって A シュノアランダムと A 真理値表シュノアランダムが異なるような A が存在する。
シュノアランダムで独立性定理が一方向だけ成立する理由はシュノアランダムが不適切に小さく定義されたからだと解釈できる。

命題 28 (ハンセン). $A \equiv_T B$ かつ $A \oplus B$ がシュノアランダムとなるような A, B が存在する。

命題 29. $A \equiv_T B$ かつ A は B 真理値表シュノアランダムとなるような A, B が存在する。

A シュノアランダムと A 真理値表シュノアランダムが異なる A の特徴付けはまだできていない。

シュノアランダムの列が独立性定理を満たさないのは

シュノアランダムが独立性定理を満たさないことが分かってから、どのようなシュノアランダムの列に対して成り立たないのかについて調べられてきた。
フランクリンとステファンはどのようなシュノアランダムの列が独立性定理を満たさないシュノアランダムの半分になるかを問うた。
真理値表シュノアランダムに関する次の定理は、これに対して明快な解答を与える。

定理 30. 任意の $high$ の集合 A に対して、チューリング同値の A 真理値表シュノアランダムが存在する。

この系として任意のシュノアランダムの列は独立性定理を満たさないシュノアランダムの半分になることが分かる。

真理値表還元ランダム

計算可能ランダム

シュノアはシュノアランダムと同時に計算可能ランダムを定義している。
計算可能なマルチンゲールで成功しない列を計算可能ランダムと言う。
マーティンレフランダム ⇒ 計算可能ランダム ⇒ シュノアランダムが成り立ち、逆は成り立たない。
high でないところでは 3 つの概念は一致し、high では 3 つの概念は真に異なることが知られている。
また計算可能ランダムもシュノアランダム同様に、独立性定理が一方向だけ成り立ち、もう一方向は成り立たない。

真理値表還元ランダム

真理値表シュノアランダム同様に、真理値表還元ランダムが定義できる。
真理値表還元ランダムは計算可能ランダムの別の相対化になっている。
また真理値表還元ランダムは独立性定理が成り立つ。
任意の A に対して、A 真理値表還元ランダムならば A 真理値表シュノアランダムである。
逆が成り立たないかどうかはまだ分かっていない。
また A 真理値表還元ランダムと A 計算可能ランダムが異なる A の特徴付けもまだできていない。
真理値表シュノアランダム同様、以下の定理が成り立つ。

定理 31. 任意の $high$ の集合 A に対して、チューリング同値の A 真理値表還元ランダムが存在する。

最後に

まとめ

- シュノアランダムと計算可能ランダムには独立性定理が成り立つような別の相対化が存在する。
- ランダムの概念は計算可能性よりもむしろ機械の制限による相対化が自然である。
- シュノアランダムや計算可能ランダムは真理値表還元と深い関係を持つ。

これによりシュノアランダムでの相対的なランダムについていっそう深い理解ができるようになるだろう。

終り

ありがとうございました。