An extension of van Lambalgen's Theorem to infinitely many relative 1-random reals.

Kenshi Miyabe

Sep 1 2009

背景

ランダムとは何か？

実数がランダムであるとはどういうことだろうか。
以下、0 以上 1 以下の実数を考え、0 と 1 の無限列と同一視する。
次のうちランダムな実数はどれでしょう？

- $0.000000000000000000000000000000000000000000000000\cdots$
- $0.010101010101010101010101010101010101010101010101\cdots$
- $0.101010110010101010010101011010101010001011 00\cdots$

少なくとも「0 と 1 の比が 1:1」であろう。
しかし逆は成り立ちそうにない。

3 つのアプローチ

ランダムの理論では以下の 3 方向からアプローチする。

- わずかな実数しか持たないような特別な性質を持たない。
- 記述するのが難しい。
- 次の値を予想するのが難しい。

これらの適切な定式化が同値になることが知られている。
今回は 3 つ目の定式化の仕方を利用する。

丁か半か

「丁半」

- 2 つのサイコロをツボの中に入れて降り、合計が偶数か奇数かを当てるゲーム
- 偶数または奇数になる確率はそれぞれ 50%（のはず）
- 当たれば賭け金の 2 倍がもらえる

もし、予測可能であれば、何らかの規則があるということになる。
元手を何倍にもできるような規則があるか、ないか。
あればランダムではない、なければランダムであると言って良いだろう。

マルチンゲール

次の値の予測戦略に当たる概念を以下で定義する。

定義 1. 次を満たす関数 $d : \{0,1\}^* \to \mathbb{R}^+$ を <u>マルチンゲール</u> と呼ぶことにする。

$$d(\sigma) = \frac{d(\sigma 0) + d(\sigma 1)}{2}$$

マルチンゲール d が、実数 A で成功するとは、$\limsup_n d(A \upharpoonright n) = \infty$ となることを言う。

すべてのマルチンンゲール d に対して、成功しない実数はランダムであろう。
しかし、そのような実数は存在しない。
実数を固定すれば、毎回の賭けでその実数を利用して所持金を 2 倍にするようなマルチンゲールが存在してしまう。

計算可能性 (集合)

そこで計算可能な戦略だけを許すことにしよう。

定義 2. ある集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ が <u>計算可能</u> であるとは、任意の自然数 n が A に含まれるかどうかが判別可能なとき言う。
つまり、あるチューリングマシン Φ が存在して、

$$\Phi(n) = \begin{cases} 1 \ (n \in A) \\ 0 \ (n \notin A) \end{cases}$$

また、集合 A が <u>計算可枚挙</u> または <u>c.e.</u> であるとは、元を列挙可能なとき言う。
上と比較して書けば、あるチューリングマシン Φ が存在して、

$$\Phi(n) = \begin{cases} 1 \ (n \in A) \\ \uparrow \ \ (n \notin A) \end{cases}$$

計算可能性 (実数、関数)

定義 3. ある実数 r が <u>計算可能</u> であるとは、任意の精度で計算可能なとき言う。
つまり、$\Phi(m) = r \restriction m$ となる Φ が存在する。
ここで $r \restriction m$ は r の最初の m 桁を表す。
ある実数 r が <u>c.e.</u> であるとは、単調増加の有理数近似列が存在するとき言う。
つまり、$\Phi(m) = a_m \in \mathbb{Q}$ となる単調増加有理数列 $\{a_m\}$ に対して $r = \lim_n a_n$。
ある実数値関数が <u>計算可能</u> であるとは、その関数の値が一様に計算可能なとき言う。
ある実数値関数が <u>c.e.</u> であるとは、その関数の値が一様に c.e. であるとき言う。

注意 4. 万能チューリングマシンを使って、すべての c.e. な実数を列挙することができる。しかし、計算可能な実数を列挙することはできない。

マーティンレフランダム

定義 5 (シュノア 1971)**.** すべての *c.e.* マルチンゲールに対して、成功しない実数を マーティンレフランダム、または ***1*** ランダム と呼ぶ。

注意 6. マーティンレフランダムは、最初マーティンレフによって定義されたが、後にシュノアなどによりマルチンゲールによる特徴付けがなされた。

注意 7. マーティンレフランダムはランダムネスの理論で最も自然なランダムネスであると考えられている。また、後に一般の自然数 n に対して、n ランダムが定義され、マーティンレフランダムはその $n = 1$ の場合であることから、*1* ランダムとも呼ばれる。

最適なマルチンゲール

定義 8. *c.e.* マルチンゲール d が次を満たすとき 最適 *(Optimal)* であると言う。
「ある *c.e.* マルチンゲールがある実数で成功したら、d もその実数で成功する」

命題 9. 最適な *c.e.* マルチンゲールは存在する。

命題 10. ある実数が *1* ランダムであることと、最適な *c.e.* マルチンゲールがその実数で成功しないことは、同値である。

命題 11. *1* ランダムな実数は存在する。

Proof. 最適な c.e. マルチンゲール d が大きくならないように実数を選ぶことができる。 □

成功する実数は少ない

定理 12 (コルモゴロフ不等式). マルチンゲール d が一時的にでも初期費用の n 倍になる実数の測度は、$1/n$ 以下である。

命題 13. *1* ランダムな実数の測度は *1* である。

つまり、適当な実数を選べば、確率 1 でその実数は 1 ランダムである。

注意 14. 代数的数や、円周率 π、自然対数の底 e などは、*1* ランダムではない。

0 と *1* の比は *1:1*

1 ランダムは、ランダムな数として自然な性質を多く持つ。

命題 15. *1* ランダムな実数の *(2* 進数展開に出てくる*)0* と *1* の比は、*1:1* である。

証明*.* 1:1 ではなかったとしよう。
一般性を失うことなく、0 の方が多く出てくるとして良い。
ある計算可能な $r > \frac{1}{2}$ があって、最初の n 桁に出てくる 0 が rn よりも多くなる n が無限に存在する。
そこで、毎回 0 に持ち金の r 倍を賭ける戦略を考える。
上記の n の時、持ち金は少なくとも初期費用の $(2r)^{rn}(2-2r)^{(1-r)n}$ 倍になる。
微分して計算すると $r^r(1-r)^{1-r}$ は $r > \frac{1}{2}$ の時、真に $\frac{1}{2}$ より大きい。
よって、この戦略は成功する。 $\square$

互いにランダム

ランダムであれば、どの部分も他の部分の情報を持たないのが自然である。

定義 16. ある実数が A をオラクルとして利用したすべての *c.e.* マルチンゲールがその実数で成功しない時、$\underline{A\text{ に対して}}$ マーティンレフランダム、または $\underline{A\text{ ランダム}}$ であると言う。

実数 A と B をそれぞれ奇数番目と偶数番目に持つ実数を $A \oplus B$ で表す。

定理 17 (独立性定理 1987)**.** 実数 $A \oplus B$ が *1* ランダムであることと、A が *1* ランダムかつ B が A ランダムであることは同値。

独立性定理の拡張

無限個の部分に分割

独立性定理は相対的なランダムネスの研究で重要な役割を果たしてきた。
最近になって、無限個の実数の相対的なランダムネスを研究する動きが見られる。
そこで独立性定理を無限個の実数に拡張することを考える。

定義 18. 対関数 $\langle e,n\rangle$ に対して、$\{\langle e,n\rangle \mid n\in\mathbb{N}\}$ を $\underline{e\text{ 列}}$ と呼ぶ。
実数 A に対して、$\underline{A^{[[e]]}}$ を e 列の部分だけ取り出した列とする。

以下は独立性定理と同様に良く知られている。

命題 19. 実数 A が *1* ランダムならば、$A^{[[e]]}$ は *1* ランダムである。

独立性定理を無限個への拡張するには

$[\oplus]_{e=0}^{\infty} A_e$ を e 列が A_e であるような列とする。
すぐ想像するのは以下のような形だろう。

命題 20. 列 $[\oplus]_{e=0}^{\infty} A_e$ が *1* ランダムならば、A_n は $[\oplus]_{e=0}^{n-1} A_e$ に対してマーティンレフランダムである。

ところが、この逆は成り立たない。
例えば、すべての e で、$A_e(0) = 0$ とすれば良い。

独立性定理の拡張定理

1 ランダムな実数は有限量の規則を持つことを許している。
その有限量を取り除くために、最初の有限個をうまく取り替える。
A と B が有限個を除いて一致するとき、$A =^* B$ と書く。
最終的に得られる結論は以下である。

定理 21. 実数の列 $\{A_n\}$ は、すべての n に対して A_n は $[\bigoplus]_{e=0}^{n-1} A_e$ に対してマーティンレフランダムであるとする。
この時、実数の列 $\{B_n\}$ があって、すべての n で $B_n =^* A_n$ かつ $[\bigoplus] B_n$ が *1* ランダムとなる。

独立性定理の拡張の証明

予想する順番は任意に入れ替えることができる

計算可能なマルチンゲールでは順番の入れ替えはよく研究されている。
同様に c.e. マルチンゲールでは予想する順番を入れ替えることができる。

補題 22. *c.e.* マルチンゲールに対して、任意の計算可能な順番の戦略も *c.e.* マルチンゲールになる。

以下はよく知られている結果だが、これよりすぐ分かる。

命題 23. *1* ランダムな実数は計算可能な並び替えに関して閉じている。

このため、$[\oplus]A_e$ という特種な並び方だけを考えれば十分である。
独立性定理が偶数奇数の分け方に関するものでも一般性を失っていないのも同じ理由からである。

独立性定理の新たな解釈

独立性定理はある種の並び替えで閉じていることを意味している。
つまり、最初は奇数番目だけ予想して、それが全部終わってから今度は偶数番目の予想をする。
一般には独立性定理は 1 ランダムの別の定義である「テスト」を使って証明される。
上で述べたこの考え方を使ってマルチンゲールを使って証明することもできる。
ただし、「テスト」を使ったものよりかなり冗長になる。
今回は無限個の列への拡張なので、e 列を順番に予想していけば良い。

マルチンゲールの上限を抑える

元の独立性定理は 2 つの実数に関するものなので、それぞれの大きくなる量が有限であればそれを合わせたものも有限であった。
今回は無限個の実数に関するものなので、それぞれが有限でも合計が無限大に大きくなることがある。
最初の有限個を変化させることによって、それぞれの大きくなる量を十分小さくできる。

定理 24. マルチンゲール d と *1* ランダムな実数 A および計算可能な $r > 1$ に対して、ある実数 B が存在して、$A =^* B$ かつ $d(B) \leq r$ となる。

今回の証明に他の定義ではなくマルチンゲールを使った理由はここにある。
他の定義では離散的にしか解析できないが、マルチンゲールでは任意の実数での解析が可能だからである。

マルチンゲールの上限を抑えるの証明

定理 25. マルチンゲール d と **1** ランダムな実数 A および計算可能な $r > 1$ に対して、ある実数 B が存在して、$A =^* B$ かつ $d(B) \leq r$ となる。

証明. 有限列 σ に対して、$V(\sigma)$ を σ を延長してできる実数の中で、最初の $|\sigma|$ 桁を入れ替えてもすべて d が r 以上になるものの集合とする。
コルモゴロフ不等式より、$V(\sigma)$ の測度は $2^{-|\sigma|}/r$ 以下である。
実数の集合の列 $\{U_n\}$ を帰納的に $U_0 = V(\lambda)$、$U_{n+1} = \bigcup_{\sigma \in U_n} V(\sigma)$ で定義する。
帰納的に U_n の測度は r^{-n-1} 以下であることが示せる。
よって U_n からマーティンレフテストを作れる。
A は **1** ランダムなので、ある n があって $A \notin U_n$。
もしすべての $B =^* A$ に対して $d(B) > r$ なら $A \in \bigcap_n U_n$ だから題意が成立。 $\square$

ゆっくりだが確実に勝利する

もう一つ重要な定理に、以下がある。

定理 26 (Saving Lemma, Slowly-But-Surely-Strategy). すべてのマルチンゲール d に対して、成功する実数を減らすことなく以下を満たすマルチンゲール d' が存在する。

$$d'(\sigma\tau) \geq d(\sigma) - C.$$

毎回金額が 2 円を超えたら 1 円を貯金し、残りの 1 円で賭けを続ける。
もとの戦略で成功するならこの新たな戦略でも成功する。
これは計算可能なマルチンゲールではできるが、c.e. マルチンゲールでは直接は適用できない。
しかし別の方法で c.e. マルチンゲールでも成立することを示した。

証明の流れ

定理 27. 実数の列 $\{A_n\}$ は、すべての n に対して A_n は $[\bigoplus]_{e=0}^{n-1} A_e$ に対してマーティンレフランダムであるとする。
この時、実数の列 $\{B_n\}$ があって、すべての n で $B_n =^* A_n$、かつ、$[\bigoplus]B_n$ が *1* ランダムとなる。

証明. マルチンンゲール d は「ゆっくりだが確実に勝利する」最適なものとする。
うまく選べば e 列を計算する d_n があって、
$\sup_n d_n = \infty \iff d = \infty$ とできる。
積が収束する $\epsilon_i > 1$ に対して、$d(B_n) \leq \Pi_{i=0}^{n} \epsilon_i$ となる $B_n =^* A_n$ が存在する。
$\sup_n d_n \leq \Pi_{i=0}^{\infty} < \infty$ より $[\bigoplus]B_n$ は **1** ランダム。 $\square$

まとめ

- 独立性定理は無限個に拡張できる。
- 独立性定理は 1 ランダムな実数がある種の並び替えによって閉じていることを意味すると解釈できる。
- マルチンゲールが有限量大きくなるのは 1 ランダムな実数がそのマルチンゲールの有限の情報を持ちうることと解釈できる。

これより 1 ランダムな実数が持つ「有限の情報」をマルチンゲールにより定義できるかもしれない。

終り

ありがとうございました。