An extension of van Lambalgen's Theorem to infinitely many relative 1-random reals *

Kenshi Miyabe

Jan 19, 2010

*to appear in Notre Dame Journal of Formal Logic

背景

歴史

Algorithmic randomness は、具体的な 2 進無限列のランダム性を研究する分野である。
1919 年、von Mises によりランダムな 2 進無限列について考察が始まる。
Church らにより計算可能性の概念が導入され厳密な定式化が行われた。
1939 年、Ville により von Mises の定義は不十分であることが指摘された。
1966 年、Martin-Löf により「テスト」によるランダムネスの定式化がなされる。
1971 年、Schnorr により Kolmogorov 複雑性、マルチンゲールによる特徴付けがなされる。

計算可能性

Algorithmic randomness の理論は計算可能性の理論を基盤としている。
ある集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ が計算可能とは、その特性関数が計算可能であることを言う。
計算可能な実数とは、2 進展開が計算可能であることを言う。
実数値関数 $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ が計算可能とは、ある計算可能な関数 $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ があって $|h(k, n) - g(k)| \leq 2^{-n}$ となることを言う。
ある集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ が c.e. であるとは、部分計算可能関数の定義域となることを言う。
実数が左 c.e. とは、計算可能で単調非減少な有理数列の極限となるとき言う。
実数値関数 $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ が左 c.e. とは、$\{\langle r, k\rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{N} \ : \ r < g(k)\}$ が c.e. であることを言う。

マルチンゲール

次の値の予測戦略に当たる概念を以下で定義する。

定義 1. 次を満たす関数 $d : \{0,1\}^* \to \mathbb{R}^+$ を マルチンゲール と呼ぶことにする。

$$d(\sigma) = \frac{d(\sigma 0) + d(\sigma 1)}{2}$$

マルチンゲール d が、列 A で成功するとは、$\limsup_n d(A \upharpoonright n) = \infty$ となることを言う。

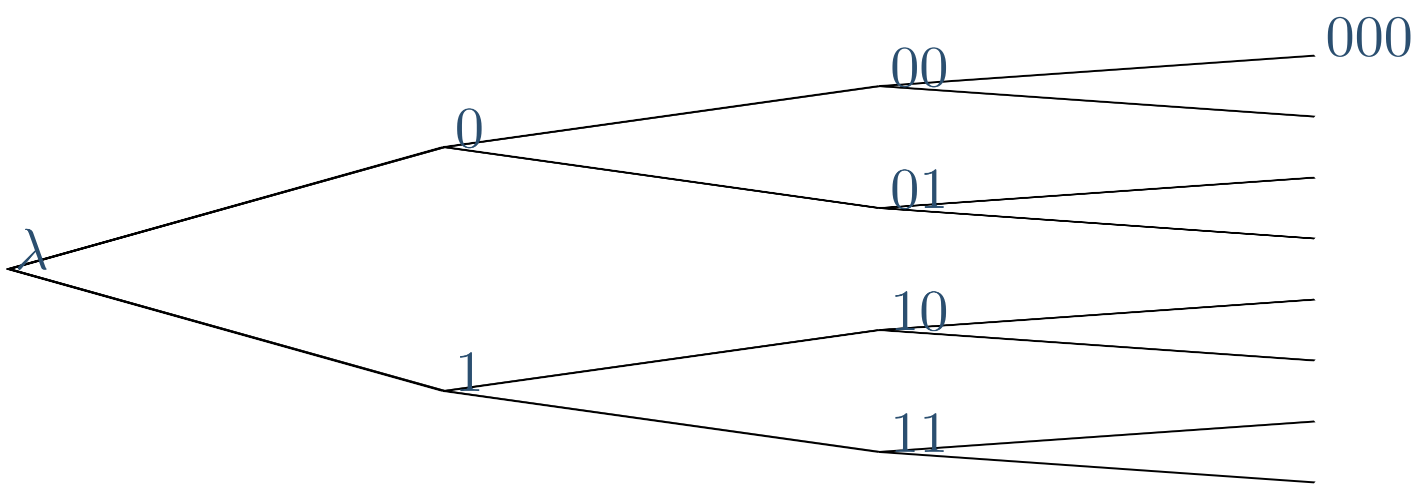
すべての左 c.e. マルチンゲールに対して成功しない列を、Martin-Löf ランダム または 1 ランダム と呼ぶ。
以下、$[0,1]$ の実数をその 2 進展開列と同一視する。

万能マルチンゲール

命題 2. 次を満たす 万能*c.e.* マルチンゲール d が存在する。
「ある *c.e.* マルチンゲールがある実数で成功したら、d もその実数で成功する」

命題 3. *1* ランダムな実数が存在する。

証明*.* 万能 c.e. マルチンゲール d が大きくならないように実数を選ぶことができる。 □



成功する実数は少ない

定理 4 (コルモゴロフ不等式). マルチンゲール d が一時的にでも初期費用の n 倍になる実数の測度は、$1/n$ 以下である。

命題 5. *1 ランダムな実数の測度は 1 である。*

つまり、適当な実数を選べば、確率 1 でその実数は 1 ランダムである。
1 ランダムな実数は正規数である。
代数的数や、円周率 π、自然対数の底 e などは、1 ランダムではない。

互いにランダム

ランダムであれば、どの部分も他の部分の情報を持たないのが自然である。

定義 6. ある実数が A をオラクルとして利用したすべての c.e. マルチンゲールがその実数で成功しない時、$\underline{A\text{ に対して}}$ マーティンレフランダム、または $\underline{A\text{ ランダム}}$ であると言う。

実数 A と B をそれぞれ奇数番目と偶数番目に持つ実数を $A \oplus B$ で表す。

定理 7 (van Lambalgen's Theorem(独立性定理)1987). 実数 $A \oplus B$ が *1* ランダムであることと、A が *1* ランダムかつ B が A ランダムであることは同値。

独立性定理の拡張

無限個の部分に分割

独立性定理は相対的なランダムネスの研究で重要な役割を果たしてきた。
最近になって、無限個の実数の相対的なランダムネスを研究する動きが見られる。
そこで独立性定理を無限個の実数に拡張することを考える。

定義 8. 計算可能で全単射の対関数 $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を一つ固定する。
対関数 $\langle e, n \rangle$ に対して、$\{\langle e, n \rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$ を <u>e 列</u> と呼ぶ。
実数 A に対して、<u>$A^{[[e]]}$</u> を e 列の部分だけ取り出した列とする。

以下は独立性定理と同様に良く知られている。

命題 9. 実数 A が *1* ランダムならば、$A^{[[e]]}$ は *1* ランダムである。

図

(0,3)	(1,3)	(2,3)			
(0,2)	(1,2)	(2,2)			
(0,1)	(1,1)	(2,1)	(3,1)		
(0,0)	(1,0)	(2,0)	(3,0)		
A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5

独立性定理を無限個の場合に拡張

$[\oplus]_{e=0}^{\infty} A_e$ を e 列が A_e であるような列とする。

命題 10. 列 $[\oplus]_{e=0}^{\infty} A_e$ が *1* ランダムならば、A_n は $[\oplus]_{e=0}^{n-1} A_e$ に対してマーティンレフランダムである。

ところが、この逆は成り立たない。
例えば、すべての e で、$A_e(0) = 0$ とすれば良い。
A と B が有限個を除いて一致するとき、$A =^* B$ と書く。
最終的に得られる結論は以下である。

定理 11. 実数の列 $\{A_n\}$ は、すべての n に対して A_n は $[\oplus]_{e=0}^{n-1} A_e$ に対してマーティンレフランダムであるとする。
この時、実数の列 $\{B_n\}$ があって、すべての n で $B_n =^* A_n$ かつ $[\oplus] B_n$ が *1* ランダムとなる。

独立性定理の拡張の証明

予想する順番は任意に入れ替えることができる

計算可能なマルチンゲールでは順番の入れ替えはよく研究されている。
同様に c.e. マルチンゲールでは予想する順番を入れ替えることができる。

補題 12. *c.e.* マルチンゲールに対して、任意の計算可能な順番の戦略も *c.e.* マルチンゲールになる。

以下はよく知られている結果だが、これよりすぐ分かる。

命題 13. *1* ランダムな実数は計算可能な並び替えに関して閉じている。

このため、$[\oplus]A_e$ という特種な並び方だけを考えれば十分である。
独立性定理が偶数奇数の分け方に関するものでも一般性を失っていないのも同じ理由からである。

独立性定理の新たな解釈

独立性定理はある種の並び替えで閉じていることを意味している。
つまり、最初は奇数番目だけ予想して、それが全部終わってから今度は偶数番目の予想をする。
一般には独立性定理は 1 ランダムの別の定義である「テスト」を使って証明されるが、この考え方を使ってマルチンゲールにより証明することもできる。
ただし、「テスト」を使ったものよりかなり冗長になる。
今回は無限個の列への拡張なので、e 列を順番に予想していけば良い。

図

(0,3)	(1,3)	(2,3)			
(0,2)	(1,2)	(2,2)			
(0,1)	(1,1)	(2,1)	(3,1)		
(0,0)	(1,0)	(2,0)	(3,0)		
A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5

マルチンゲールの上限は抑えられる

元の独立性定理は 2 つの実数に関するものなので、それぞれの大きくなる量が有限であればそれを合わせたものも有限であった。
今回は無限個の実数に関するものなので、それぞれが有限でも合計が無限大に大きくなることがある。
最初の有限個を変化させることによって、それぞれの大きくなる量を十分小さくできる。

定理 14. マルチンゲール d と *1* ランダムな実数 A および計算可能な $r > 1$ に対して、ある実数 B が存在して、$A =^* B$ かつ $d(B) \leq r$ となる。

今回の証明に他の定義ではなくマルチンゲールを使った理由はここにある。
他の定義では離散的にしか解析できないが、マルチンゲールでは任意の実数での解析が可能だからである。

上限を抑えられることの証明

定理 15. マルチンゲール d と **1** ランダムな実数 A および計算可能な $r > 1$ に対して、ある実数 B が存在して、$A =^* B$ かつ $d(B) \le r$ となる。

証明. 有限列 σ に対して、$V(\sigma)$ を σ を延長してできる実数の中で、最初の $|\sigma|$ 桁を入れ替えてもすべて d が r 以上になるものの集合とする。
コルモゴロフ不等式より、$V(\sigma)$ の測度は $2^{-|\sigma|}/r$ 以下である。
実数の開集合の列 $\{U_n\}$ を帰納的に $U_0 = V(\lambda)$、
$U_{n+1} = \bigcup_{\sigma \in U_n} V(\sigma)$ で定義する。
帰納的に U_n の測度は r^{-n-1} 以下であることが示せる。
よって U_n からマーティンレフテストを作れる。
A は **1** ランダムなので、ある n があって $A \notin U_n$。
もしすべての $B =^* A$ に対して $d(B) > r$ なら $A \in \bigcap_n U_n$ だから題意が成立。 □

ゆっくりだが確実に勝利する

もう一つ重要な定理に、以下がある。

定理 16 (Saving Lemma, Slowly-But-Surely-Strategy). すべてのマルチンゲール d に対して、成功する実数の集合が同じで、かつ以下を満たすマルチンゲール d' が存在する。

$$d'(\sigma\tau) \geq d'(\sigma) - C.$$

毎回金額が 2 円を超えたら 1 円を貯金し、残りの 1 円で賭けを続ける。
もとの戦略で成功するならこの新たな戦略でも成功する。
この方法は計算可能なマルチンゲールでは適用できるが、c.e. マルチンゲールでは直接は適用できない。
しかし別の方法で c.e. マルチンゲールでも成立することを示した。

証明の流れ

定理 17. 実数の列 $\{A_n\}$ は、すべての n に対して A_n は $[\oplus]_{e=0}^{n-1} A_e$ に対してマーティンレフランダムであるとする。
この時、実数の列 $\{B_n\}$ があって、すべての n で $B_n =^* A_n$、かつ、$[\oplus] B_n$ が *1* ランダムとなる。

証明. マルチンンゲール d を「ゆっくりだが確実に勝利する」万能のものとする。
うまく選べば e 列を計算する d_n があって、
$\sup_n d_n = \infty \iff d = \infty$ とできる。
積が収束する $\epsilon_i > 1$ に対して、$d(B_n) \leq \Pi_{i=0}^{n} \epsilon_i$ となる $B_n =^* A_n$ が存在する。
$\sup_n d_n \leq \Pi_{i=0}^{\infty} \epsilon_i < \infty$ より $[\oplus] B_n$ は **1** ランダム。 $\square$

まとめ

今回得られた結果。

- 独立性定理は 1 ランダムな実数がある種の並び替えによって閉じていることを意味すると解釈できる。
- 任意の c.e. マルチンゲールに対して Saving Lemma が適応できることを示した。
- マルチンゲールの有限量の増大は 1 ランダムな実数が持つ有限の情報と解釈できる。
- 独立性定理は無限個の場合に拡張できる。

今後の課題。

- 1 ランダムな実数に関して閉じている並び替えの定式化。
- 1 ランダムな実数が持つ「有限の情報」の定義。