# 真理値表シュノアランダムネスと真理値表還元ランダムネス

宮部賢志

自然なランダムな列の定式化に初めて成功したのはマーティンレフである。今日、マーティンレフランダムネスと呼ばれ、その測度が 0 に収束する計算可能な上限を持つ c.e. 開集合の列に含まれない列として定義される。その後、コルモゴロフ複雑性や c.e. マルチンゲールによる同値な特徴付けが発見された。

ところがシュノアはランダムネスは計算可能な戦略で定義されるべきだと主張し、0 に収束する計算可能な測度を持つ c.e. 開集合の列に含まれない列や計算可能なマルチンゲールによる定義を提案した。これらは今日、それぞれシュノアランダムネス、計算可能ランダムネスと呼ばれる。

その後、マーティンレフランダムネスに関して、ランダムな列として自然と思える性質がいくつも示された。一例が独立性定理であり、ランダムな列はある部分が他の部分の情報を持たないことを主張する。独立性定理は他のランダムネスでも示され、独立性定理の成立は適切なランダムネスの概念であることを表す指標と考えられている。

シュノアランダムネスや計算可能ランダムネスの研究は長く進んでいなかったが、最近になって同値な特徴付けが発見されるなど、これらのランダムネスも自然な性質を持っていることが示された。同時に、独立性定理が成り立たないことも示され、どのような場合に成り立たないのか盛んに研究されている。しかし、これらのランダムネスは自然なランダムネスであり、独立性定理が成り立たないのは不自然である。このことは、これらのランダムネスに適切な別な相対化があることを示している。

別の相対化を考える必要がある理由がもう一つある。マーティンレフランダムネスに関する大きな結果の一つが、triviality、lowness、basis の概念が一致することである。一方、シュノアランダムネスに関しては、triviality がシュノア lowness に一致しない。フランクリンとステファンがマルチンゲールにより真理値表シュノアランダムネスを定義し、シュノア triviality と真理値表シュノア lowness が一致することを示した。このことは、真理値表シュノアランダムネスがシュノアランダムネスの適切な別の相対化であることを示している。

本論文では、シュノアランダムネスの別の適切な相対化として真理値表シュノアランダムネスを、計算可能性ランダムネスの相対化として真理値表還元ランダムネスを提案した。これらがシュノアランダムネスや計算可能性ランダムネスと同様、ランダムネスとして自然な性質を持つことを示した。特に、同値な特徴付けが自然に行えることを証明した。また、これらのランダムネスは独立性定理が成り立つことを示した。

次に、シュノアランダムネスと真理値表シュノアランダムネスの違いについて考察した。high の列に対する真理値表シュノアランダムな列にはその実数とチューリング同値な列が含まれることを示した。このことから、すべてのシュノアランダムな列は独立性定理が成り立たない片割れになることが分かる。これはフランクリンとステファンが提案していた問題に対する解答になっている。

最後に、真理値表シュノアランダムネスに関して、triviality、lowness、basis の概念が一致することを示した。