測度の計算可能の位相空間

宮部賢志

computable analysis は実数から実数への計算可能な関数に関する研究として始まった。実数上の計算可能な関数の定義にはいくつかの流派があるが、ここでは Weihrauch らの representation を使ったアプローチに注目する。整数から整数、または有限文字列から有限文字列への計算可能な関数は 1930 年代に Church や Turing らによって定式化された。この概念を自然に拡張し無限文字列から無限文字列への計算を許したものを Type2-machine と呼ぶ。各実数は無限文字列によって表現 (representation) されるので、実数から実数の計算とは無限文字列から無限文字列への計算だと思うことができる。

以上の議論は一般の位相空間上に拡張される。すなわち T_0 で second-countable な空間に対して、各点をその点を含む開基の情報を持つ無限文字列で表現する。そのように表現される空間を computable topological space と呼ぶ。いくつかの論文で微妙に異なるものを指して computable topological space と呼ばれているが、本論文では 2009 年の Weihrauch と Grubba の論文を基礎とした。

開基によって表現される空間上の確率測度の表現は 2007 年に Schöder によって与えられており、その表現により computable topological space になることが筆者によって示されていた。さらに計算可能な確率測度がその空間の計算可能な点として定義されていた。

本論文では以上の議論を非負有限測度の空間に拡張した。ある computable topological space 上の非負有限測度の空間を考える。開基の測度による開集合を準開基とする A-topology により、この空間は computable topological space となる。これにより計算可能な非負有限測度がその空間の計算可能な点として定義される。計算可能な測度のいくつかの性質から無限の計算可能な測度も定義した。

通常、ランダムネスは確率測度上で考える。しかし実は確率測度である必要はない。例えば実数のルベーグ測度上のランダムな点はその少数部分がランダムな点として定義できる。本論文では非負の測度に対して、テスト、マルチンゲールによる同値な特徴付けを与えた。また実数上の計算可能な連続測度に対しては簡単な複雑性による特徴付けが存在することも示した。

最後に有限個の測度の和の測度でランダムであることと、そのどれかの測度でランダムであることが同値であることを示した。