Frequency and belief are probability

Kenshi Miyabe

November 2, 2010

目次

話の流れ

確率概念の定式化

いくつかある確率概念の数学的定式化の試みの歴史と、von Mises や Kolmogorov の哲学について

ランダムネスの理論

アルゴリズム論的ランダムネスの理論の概要を説明する。

事実上不可能性

「事実上不可能性の原理」に新たな説明を与える。

頻度と信念と確率

確率解釈の有力な一つに「頻度説」があるが、頻度が確率なのではなく、ランダムな振る舞いから頻度が導かれ、頻度が確率だと思って良い場合があることを説明する。また、「信念の度合い」は有力な確率解釈の一つであるが、最善の信念の度合いが元の測度に一致することを説明する。

確率概念の定式化

要約

- 確率概念には頻度主義、傾向説 (客観確率)、信念の度合い (主観確率) などがある
- それぞれについて様々な方法で定式化が試みられてきた
- 現在その中で成功しているのは、測度論的確率論 (とゲーム論的確率論)
- ランダムネスの理論もその試みの中から生まれた
- ランダムネスの理論を確率概念の定式化のために使うのは自然

Pascal と Fermat の書簡

Pascal と Fermat の間で交わされた
「ゲームが途中で終わったときの賭け金の配分問題」
が、数学的確率の始まりと言われる。

- Pascal は価格設定の方法で解いた
  → 信念の度合いを表現している
  → ゲーム論的確率論に受け継がれる

- Fermat は組み合わせの方法で解いた
  → 傾向説を表現している
  → 測度論的確率論に受け継がれる

やがて組み合わせの方法がより基本的と見られるようになる。

古典確率

古典確率としては

> 確率とは「同程度に確からしい場合の数」と「その事象の場合の数」の比である

という主張に落ち着く。
頻度は大数の法則として、Bernoulli、De Moivre、Laplace らによって、その枠組みで表現された。
しかし「同程度に確からしい」とは何か？という問題が残る。
19 世紀には経験主義からの要求から、確率が頻度の同一視される傾向もあり、確率の研究が進まなかった。

測度論的確率論

測度論が到来し、Borel が強大数の法則を示したことで、確率と測度が同一視されるようになる。
Hilbert による確率の公理化の求めに対して、Kolmogorov は有名な著書「確率論の基礎概念」で満足のいく方法で答える。
特徴として、

- 確率の意味を問わない
- どんな立場の人でも使える
- 具体的な列のランダム性には何も答えない

確率 *0* の事象はなぜ起きないのか

Kolmogorov 自身は彼の公理系を、確率の頻度主義的概念に対する公理系と見なしていた。

> もし確率がとても小さければ、諸条件 C が 1 度だけ実現されたときには事象 E はまったく起きないと事実上確信できる。(Kolmogorov)

しかし「確率 0 の事象はなぜ起きないのか」の問いは依然として残る。

注意 1. これは *Cournot* の架け橋、*Lévy* の事実上不可能性の原理、ゲーム論的確率論では基本解釈仮説などと呼ばれ難しい問題である。後でこの問題にはもう一度触れる。

ランダムな列の定義の必要性

しかし後にはこのようにも述べている。

> The set theoretic axiom of the calculus of probability ... had solved the majority of formal difficulties ... so successfully that the problem of finding the basis of real applications of the results of the mathematical theory of probability became rather secondary to many investigators.
>
> I have already expressed the view that the basis for the applicability of the results of the mathematical theory of probability to real 'random phenomena' must depend on some form of the frequency concept of probability, the unavoidable nature of which has been establised by von Mises in a spirited manner.
>
> (Kolmogorov 1963)

von Mises のコレクティーフ

1919 年、von Mises は確率概念の定式化のためにはランダムな列の定義が必要だと考えた。

定義 2. コレクティーフとは、*2* 進無限列の中で、すべての適当な部分列の *0* と *1* の比がある定数 p に収束するものを言う。
この列が確率 p を表す。

このように von Mises の哲学では、まずコレクティーフが来てそれから確率が定義される。
この定義は後に様々に拡張される。
1940 年の Doob と von Mises の討論では、測度論的確率論とともに競い合う数学的基礎として論じられている。

コレクティーフへの反論

コレクティーフには様々な反論があったのも事実である。
最もきれいにまとめられているのは 1937 年 Geneva 会議での Fréchet によるものである。

- 測度論的確率論の方が単純である
  →Fréchet は傾向説を支持しており、立場の違いである
- 重複対数の法則が成り立たない
  → 後に Ville により拡張され解消

ところが、von Mises 自身は Ville による拡張 (マルチンゲール) を受け入れず、あくまでも頻度にこだわった。
結果としては、測度論的確率論のみが残る。

Kolmogorov の立場

R. von Mises、1953 年没。
そして、1919 年から約 50 年（!!）かかってランダムな列の統一的見解が見られるようになり、アルゴリズム論的ランダムネスの本格的な始まり。

- 1966 年ついに Martin-Löf ランダムネスが定義された。
- 1971 年には Schnorr によりマルチンゲールによる特徴付けが得られた。
- 1973 年には複雑性による特徴付けも得られた。

ところが Kolmogorov は確率概念を導くことではなく、有限系列に関心を持ち続けた。
そして、確率を使わず、直接統計に応用する方法を提案した。
その後、von Mises の理論をつかって確率概念の基礎付けを目指した研究者として van Lambalgen がいるが、挫折したようである。

今までのまとめ

多くの人 測度論的 v.s. von Mises 的

Kolmogorov

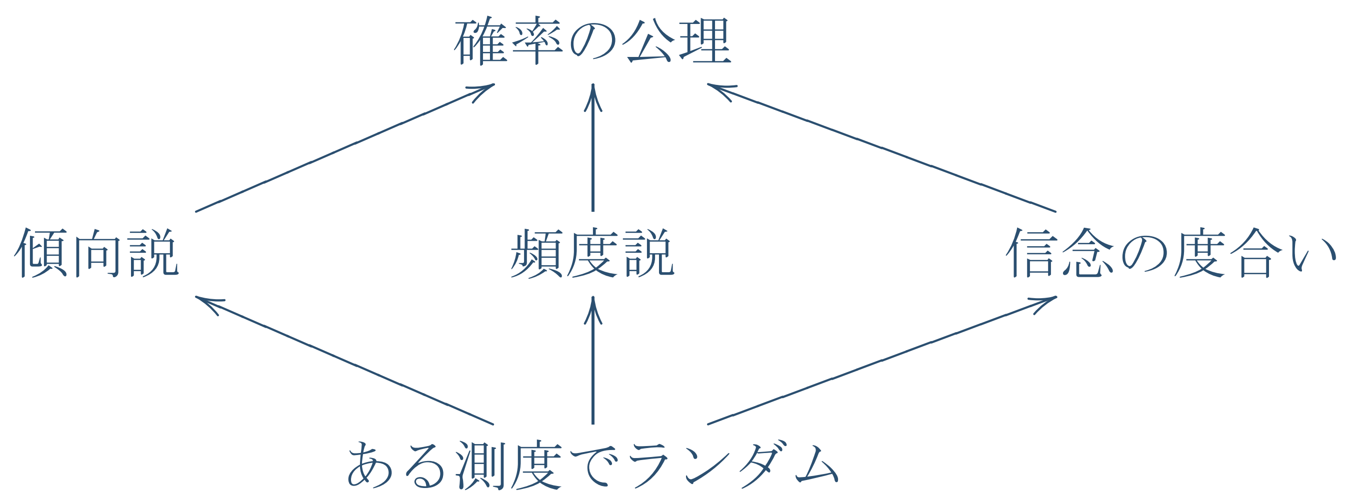
$$\text{確率の公理} \xrightarrow[\text{von Mises 的}]{} \text{ランダムな現象}$$

頻度論者

$$\text{von Mises の理論} \longrightarrow \text{確率の公理}$$

主張

ランダムネスからの提案



- 「ランダムネスから確率の公理を導く」ことを目指す。
- コレクティーフではなくランダムネスを使う。
- 使うランダムネスはカントール空間ではなく一般の位相空間。

ランダムネスの理論

TTE

計算可能解析 (computable analysis) (元は) 実数から実数の計算可能性を考察するための理論

TTE(Type-2 Theory of Effectivity) その中で representation のアプローチを取る理論

タイプ 2 マシン チューリングマシンで、入力または出力が無限の場合を許すものである。ただし、出力は一方向に制限されている。

定義 3. $Y_0, Y_1 \in \{\Sigma^*, \Sigma^\omega\}$ として、関数 $f :\subseteq Y_0 \to Y_1$ が計算可能であるとは、あるタイプ 2 マシンで計算可能であることを言う。

Σ^* に離散位相を、Σ^ω には $\{w\Sigma^\omega : w \in \Sigma^*\}$ を開基とする位相を入れる。
すべての計算可能な関数は連続となる。

計算可能位相空間

定義 4 (計算可能位相空間 (computable topological space)). 計算可能位相空間とは、*4* つ組 $\mathbf{X} = (X, \tau, \beta, \nu)$ で、

- (X, τ) は T_0 の位相空間、
- $\nu :\subseteq \Sigma^* \to \beta$ は τ の開基 β への関数、
- $dom(\nu)$ は計算可能、
- 以下を満たす c.e. 集合 $S \subseteq (dom(\nu))^3$ が存在する

$$\nu(u) \cap \nu(v) = \bigcup \{\nu(w) \ : \ (u, v, w) \in S\}$$

を満たすものを言う。

例 5. 実数は通常の位相と有理数を端に持つ区間の集合を開基とすることで、計算可能位相空間になる。

表現

定義 6 (表現 (representation)). 計算可能位相空間上の、点の表現 δ と開集合の表現 θ が以下で定義される。

$$x = \delta(p) \iff (\forall w \in \Sigma^*)(w \ll p \iff x \in \nu(w)),$$

$$W = \theta(p) \iff (w \ll p \Rightarrow w \in \mathit{dom}(\nu)) \wedge W = \bigcup\{\nu(w) : w \ll p\}$$

ここで、$p \in \Sigma^\omega$ は文字列の列をエンコードしたものであり、$w \ll p$ は $w \in \Sigma^*$ がその列に現れることを表す。
例えば、各点の δ 表現とはその点を含むすべての開基の名前のリストである。
通常の位相の実数の表現 δ を特に ρ と書く。
ある点が計算可能な δ 表現を持つとき、その点は δ 計算可能であると言う。

ランダムネス

$\mathbf{X}$ を計算可能位相空間とし、μ をその上の測度とする。

定義 7. $\mathbf{X}$ 上の <u>テスト</u> とは、一様 θ 計算可能な開集合の列 $\{U_n\}$ で、$\mu(U_n) \leq 2^{-n}$ とする。点 $x \in X$ が <u>μ 測度ランダム</u> とは、すべてのテストに対し $x \notin \bigcap U_n$ となることを言う。μ 測度ランダムな点の集合を $\mathit{RND}(\mu)$ で表す。

定理 8 (宮部). $x \in X$ が μ 測度ランダムであることと、すべての非負の一様 $(\delta, \overline{\rho_<})$ 計算可能なマルチンゲール $\{f_n\}$ に対し $\sup_n f_n(x) < \infty$ となることは同値である。

自然なランダムネスが定義できる条件

定義 9 (宮部). 開基が完全 *(complete)* である計算位相空間 $\mathbf{X}$ とその上の測度 μ に対して、$x \in X$ が μ 複雑ランダム であるとは、$\xi(u) = \nu(u)^c$ として、

$$x \in \xi(u) \Rightarrow K(u) \geq -\log \mu\xi(u) - O(1)$$

であることを言う。μ 複雑ランダムな点の集合を $cRND(\mu)$ で表す。

定理 10 (宮部). 計算可能位相空間 $\mathbf{X}$ と、その上の測度 μ が以下を満たすとする。

- 測度 μ は計算可能、
- *almost decidability* と *almost disjointness* を持つ。

このとき、$RND(\mu) = cRND(\mu)$

事実上不可能性

σ 加法族

定義 11. S を集合とする。S の部分集合の系 Σ_0 が S 上の加法族 であるとは、

(i) $S \in \Sigma_0$

(ii) $F \in \Sigma_0 \Rightarrow F^c = S \backslash F \in \Sigma_0$

(iii) $F, G \in \Sigma_0 \Rightarrow F \cup G \in \Sigma_0$

が成り立つことである。S の部分集合の系 Σ が S の加法族で、

$$F_n \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_n F_n \in \Sigma$$

が成り立つとき、S 上の σ 加法族と言う。

確率の公理

定義 12 (確率の公理 (Kolmogorov 1933))**.** 集合 S 上の加法族 Σ_0 に対し、P が確率関数であるとは、

(i) すべての $A \in \Sigma_0$ に対し、$P(A) \geq 0$

(ii) $P(S) = 1$

(iii) *(有限加法性)* 互いに素である $A, B \in \Sigma_0$ に対し、
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

σ 加法族 Σ に対し、P が確率関数であるとは、上の **2** つと以下を満たすことを言う。
(可算加法性) 互いに素な $F_n \in \Sigma$ に対し、$P(\bigcup F_n) = \sum_n P(F_n)$

注意 13. 「P が測度である」とは言っていない !!

0 を集めると 1 になるのか？

P をルベーグ測度として、$([0,1],\mathcal{B},P)$ は確率空間になる。
それぞれの点 $x\in[0,1]$ に対して、一点集合の確率は

$$P(\{x\})=0$$

であるが、それを集めた $[0,1]$ 区間の確率は

$$P([0,1])=1$$

となる。
数学的には「濃度の違い」で説明されるが、これは

確率 0 であっても「起こらない」とは「言えない」

という解釈しかできず、それならば

確率 0 とは一体、何を意味するのか？

ということになる。

測度 0 の事象はなぜ起こらないか？

定義 14. 開基を含む最小の有限加法族を $\mathcal{A}$ で表し、その元を観察可能な集合と呼ぶ。

定理 15. 計算可能位相空間の開基が *uniformly almost decidable* とする。このとき、E を観察可能な集合として、

$$\mu(E) = 0 \Rightarrow E \cap \mathit{cRND}(\mu) = \phi$$
$$\mu(E) = 1 \Rightarrow \mathit{cRND}(\mu) \subseteq E$$

今、次のことを仮定する。

「その測度でランダムな元が現れる」

このとき、測度 0 の観察可能な集合には現れず、測度 1 の観察可能な集合には必ず現れることを意味する。
当然、Borel 集合ではこのようなことは言えない。

自然な解釈

具体的には、区間 $[0,1]$ から 1 点を「ランダム」に選んで、「ランダムな点」が現れるとしよう。
私たちが思い浮かべる 0, 1, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}-1$ などはすべて現れない。
(測度論的確率論では、「現れるかもしれないがその確率は 0」という主張しかできなかった。)
しかし、現れる可能性のある「ランダムな点」の測度は 1 である。
このことは次のことを示唆する。

> 「確率概念は有限加法性は満たすが、可算加法性にはなんらかの制限が必要。」

実は、主観主義を主張した de Finetti は長い間、可算加法性を公理に入れるべきではないと主張したが、そのことと符合しているように思われる。

頻度と信念と確率

頻度

定義 16. $\{x_i\}$ を X 上の点列とする。$\{x_i\}$ の頻度F とは、部分実数値集合関数で以下で定義される。

$$F(A) = \lim_n \frac{\#\{i \leq n \ : \ x_i \in A\}}{n}$$

定理 17. X は *almost disjointness* を持つとする。F を $\prod \mu$ ランダムな点列の頻度とすると、

$$F|\mathcal{A} = \mu|\mathcal{A}$$

当然だが Borel 集合には拡張できない。

証明のための補題

補題 18. $\{x_i\}$ を $\prod \mu$ ランダムな列とする。θ 計算可能な開集合 G に対して、

$$\sup_n \frac{\#\{i \leq n \ : \ x_i \in G\}}{n} \leq \mu(G)$$

証明のアイディア. G に入るか入らないかの賭けを行うマルチンゲールを考える。
そのマルチンゲールが計算可能になるためには、入る方の賭け率が高くなる必要がある。
G に入る頻度が大きすぎるとマルチンゲールが発散する。 $\square$

信念

$x \in X$ が出たとき、プレイヤーは所持金の $f(x)$ 倍を受け取る賭けを考える。

定義 19. $(X, \mathcal{A}, \phi)$ を確率空間とする。関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が X 上の 賭け とは、

$$\int f d\phi \leq 1$$

を満たすことを言い、f の A への 信念 は

$$\int_A f d\phi$$

命題 20. 信念は確率測度である。

信念と確率

この賭けを無限回繰り返した時に金額が大きければ良い信念 (予測) であろう。
結果の列 $\{x_i\}$ は $\prod\mu$ ランダムであったとしよう。(一般には $\mu \neq \phi$)
n 回まで終わったときの金額は $\prod f(x_i)$ である。
f を (δ, ρ) 計算可能なものに限ったとき、以下の値は必ず存在する。

$$p(f) = \lim_n \frac{\log \prod_{i \le n} f(x_i)}{n}$$

$p(f)$ は $f = \frac{d\mu}{d\phi}$ $a.e.$ となる f が存在すればその f で最大値を取る。
この f の信念は μ となるから、ϕ **に関係なく (!!)**、μ を信念に持つ予測が最も良い予測である。

End

Thank you!