ランダムな実数列

宮部賢志

ランダムな２進無限列を定義する試みは1919年、von Misesにより確率論の定式化を動機として始まった。von Misesによる定義では、すべてのランダムな列に対して大数の法則が成り立つ。しかし頻度を強調するあまり、重複対数の法則が成り立たないランダムな列が存在した。後に、1966年には大数の法則も重複対数の法則も満たすMartin-Löfランダムネスが定義された。このランダムネスは現在、自然なランダムネスであると見なされている。1988年には、Vovkによりランダムな有理数の列が定義され、重複対数の法則が成り立つことが示された。本論文ではランダムな実数列を定義し、大数の法則と重複対数の法則の成立を示すことを最終目的とした。

ランダムな２進無限列はカントール空間上のランダムな点として理解される。ランダムネスが定義される空間はcomputable topological spaceに自然に拡張される。1998年、HertlingとWeihrauchはランダムな元をテストの概念を使って定義した。2010年、筆者はKolmogorov複雑性およびマルチンゲールによる同値な定義を行った。本論文でcomputable topological spaceの無限積がcomputable topological spaceとなることを示した。これにより実数列の空間がcomputable topological spaceになり、ランダムな実数列が自然に定義される。ここでは次の値のみを予測する制限された（スーパー）マルチンゲールによってもランダムな元の特徴付けができることを示した。上記のKolmogorov複雑性による定義は一般にはかなり煩雑である。ランダムな実数列の場合には、Kolmogorov複雑性による簡潔な表現があることを示した。

実数列は各項が実数であるからランダムであるかどうかが議論できる。まずcomputable topological space上の点に対してcontinuous degreeを定義した。これは2004年のMillerの論文による computable metric space 上での仕事の自然な一般化である。それらのdegreeについていくつかの性質を示した。computable topological spaceがカントール空間や実数の場合にはTuring degreeに一致する。その上でランダムな実数列が２進無限列と自然に対応関係があることを示すことによって以下のことを示した。

「ランダムな実数列の各項は互いにランダムである。」

「互いにランダムな実数の列に対して、各項がTuring同値となるランダムな実数列が存在する。」

確率論では「確率１である性質が成立する」という形の定理が多く現れる。計算可能性を入れることで、「ランダムな実数列ではある性質が成立する」という定理に自然に書き直すことができる。本論文では２つのBorel-Cantelliの補題、マルチンゲール収束定理などが、適当な定式化の元で、すべてのランダムな実数列に対して成立することを示した。

確率論における大数の法則は分散に条件を与えたものと、同分布の場合の２つがある。ランダムな実数列に対しても、考察する測度に対応してそれぞれ成立することを示した。重複対数の法則もKolmogorovによるある条件下のものとHartman-Wintnerによる同分布の場合がある。ランダムな実数列に対してもそれぞれ成立することを示した。

大数の法則や重複対数の法則など自然な性質が示されたことで、ランダムな実数列の定義が自然であることが分かる。またランダムネスの理論を使って、予測不可能な自然現象を表現することができることを示唆している。