微分可能な点はどこにあるか
ランダムネスの理論への解析からの導入

宮部　賢志　(京都大学)*

1. 「ほとんど至る所で」とはどこのことか

ある性質 P が**ほとんど至る所で**(almost everywhere) 成り立つとは，P を満たさない点の集合の測度が 0 であることを言う．例えば以下のような定理が知られている．

定理 1.1. 有界変動関数 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ はほとんど至る所で微分可能．

この「ほとんど至る所」とはどこであろうか？

確かに任意の点で微分不可能な有界変動関数は存在する．しかしある特定の関数に対してはほとんど全ての点が微分可能である．よってある可算の関数族を考えると，ほとんど全ての点がその関数族に含まれるすべての関数に対して微分可能となる．

ある数学的対象を「記述が単純なもの」に制限しその階層を考えることによって，新たな知見が得られることがある．不完全性定理や記述集合論などが良い例であろう．以下では，上記の問題について，**計算可能な関数**に制限して考えてみよう．

2. 計算可能解析

自然数から自然数への計算可能な関数の定義はよく知られている．一方，実数から実数への関数の計算可能性についても研究されてきた ([4])．

大雑把に言えば，実数から実数への関数 f が計算可能であるとは，実数 x の速い Cauchy 列が与えられたときに，$f(x)$ の速い Cauchy 列を出力する計算可能な関数が存在することを言う．ここで速い Cauchy 列とは収束が計算可能に抑えられる有理数の Cauchy 列である．計算可能な関数族は可算集合である．

3. ランダムネスの理論

上記の議論から以下が分かる．

命題 3.1. すべての有界変動関数 f に対して微分可能な点の集合 R は測度 *1* を持つ．

この R はどんな集合であろうか？

驚くべきことにこの集合 R は 1960 年代から研究されてきた **Martin-Löf ランダムな実数**の集合に一致する．これを最初に示したのは Demuth([2]) であるが，最近 Nies ら ([1]) が再証明を与えるまでほとんど知られていなかった．

さらに Nies らは別のいくつかのランダムの概念を特徴付ける関数族も与え，ランダムの概念の階層と関数族の階層との対応を研究することを提唱した．その後，他の研究者らによる貢献もあり，今までに以下のような対応が知られている．

* 〒606-8502 京都府京都市左京区北白川追分町　京都大学　数理解析研究所
e-mail: kmiyabe@kurims.kyoto-u.ac.jp
web: http://kenshi.miyabe.name/wordpress/

計算可能+至る所で微分可能	弱2ランダム
計算可能+有界変動	Martin-Löf ランダム
計算可能+Lipschitz	計算可能ランダム
計算可能+単調	計算可能ランダム
変動ノルムで計算可能+Lipshitz	Schnorr ランダム
L^1 計算可能	Schnorr ランダム

4. 積分テスト

なぜこのようなきれいな対応関係が存在するのであろうか？

講演者は**積分テスト**を挟むことで，一般の空間で強い形で見通し良く証明できるのではないかと提案している．すでに以下の特徴付けはよく知られてる．

定理 4.1. 積分テストとは積分可能な下側半計算可能関数を言う．このとき実数 $x \in [0,1]$ が *Martin-Löf* ランダム $\iff$ すべての積分テストに対して $t(x) < \infty$.

講演者は似た特徴付けが他のランダムの概念でも与えられることを示した．これまでの結果は以下のようにまとめられる．

弱2ランダム	下側計算可能+至る所有限
Martin-Löf ランダム	下側計算可能+積分可能
Schnorr ランダム	下側計算可能+積分が計算可能
Kurtz ランダム	計算可能+至る所有限
Kurtz ランダム	計算可能+積分可能
Kurtz ランダム	計算可能+積分が計算可能

このうち計算可能な積分テストによる特徴付けが与えられている Kurtz ランダムネスに対しては，微分可能性による特徴付けがより強い形で系として以下のように与えられる ([3]).

定義 4.2. $x \in [0,1]$ が $f : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ の *Lebesgue* 点であるとは，

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r} \int_{x-r}^{x+r} f d\mu = f(x)$$

であることを言う．

定理 4.3. x は *Kurtz* ランダム $\iff$ x はすべての拡張実数への計算可能な積分可能関数の *Lebesgue* 点.

以上の議論は距離空間に拡張される．また下側計算可能な積分テストによる特徴付けが与えられているランダムの概念に対しても，いくつかの修正を加えることで似た議論ができることを確認している．

参考文献

[1] V. Brattka, J. S. Miller, and A. Nies. Randomness and differentiability. to appear.

[2] O. Demuth. The differentiability of constructive functions of weakly bounded variation on pseudo numbers. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 16(3):583–599, 1975.

[3] K. Miyabe. Characterization of kurtz randomness by a differentiation theorem. submitted.

[4] K. Weihrauch. *Computable Analysis: an introduction.* Springer, Berlin, 2000.