独立同分布でない場合の大数の法則の収束速度

ゲーム論的確率論からのアプローチ

宮部　賢志　(京都大学)*1
竹村　彰通　(東京大学)*2

1. 大数の法則の収束速度としての重複対数の法則

大数の法則の収束速度は、通常、重複対数の法則として与えられる．2進無限列の場合にはKhinchin([3])が示し，以下のように一般化された．

定理 1.1 (Hartman-Wintner [2]) $\{X_n\}$を平均0，分散σ^2の独立同分布の確率変数とし$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$，$a_n = (2n \log\log n)^{1/2}$と置くと，

$$\limsup S_n/a_n = \sigma \text{ a.s.}, \ \liminf S_n/a_n = -\sigma \text{ a.s.}$$

ここで独立同分布の条件をはずすと別の条件が必要になる．

定理 1.2 (Kolmogorov [4]) $\{X_n\}$を平均0，分散σ_n^2の独立な確率変数とする．$A_n = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$とおき、$A_n \to \infty$を仮定する．さらにある正の列$\{M_n\}$があって，以下が成り立つとしよう．

$$M_n = o\left(\left(\frac{A_n}{\log\log A_n}\right)^{1/2}\right), \ |X_n| \le M_n \text{ a.s.} \tag{1}$$

このとき，以下が成り立つ．

$$\limsup \frac{S_n}{(2A_n \log\log A_n)^{1/2}} = 1 \text{ a.s.}$$

ここで(1)の条件を落とすとどうなるであろうか？

2. ゲーム論的確率論からの結果

重複対数の法則において平均や分散を条件付き平均や条件付き分散に置き換え，マルチンゲールを使って書くこともできる([8, 1])．一方ゲーム論的確率論([7])は統一的で簡潔な証明を与えることがある．講演者らの得た結果([6])は測度論的確率論では次のように書き直すことができる．gを正の単調増加関数で$\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$とする．

定理 2.1 確率変数x_nの条件付き期待値をm_n，条件付き分散をv_nとする．$A_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$とおく．$A_n \to \infty$かつ$\sum_n \frac{v_n}{g(A_n)} < \infty$であれば、

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - m_k)}{\sqrt{g(A_n)}} \to 0 \text{ a.s.}$$

*1 〒606-8502 京都府京都市左京区北白川追分町　京都大学　数理解析研究所
e-mail: kmiyabe@kurims.kyoto-u.ac.jp
web: http://kenshi.miyabe.name/wordpress/
*2 〒113-8656 東京都文京区本郷7-3-1　工学部6号館343号室
e-mail: takemura@stat.t.u-tokyo.ac.jp
web: http://park.itc.u-tokyo.ac.jp/atstat/athp/

定理 2.2 m_n, v_n が $\sum_n \frac{v_n}{g(A_n)} = \infty$ を満たすとする．このとき条件付き期待値を m_n，条件付き分散を v_n とする確率変数 x_n があって，

$$\frac{\sum_{k=1}^n (x_k - m_k)}{\sqrt{g(A_n)}}$$

はほとんど確実に収束しない．

すなわち $\frac{\sum_{k=1}^n (x_k - m_k)}{\sqrt{g(A_n)}}$ の収束が m_n, v_n の情報のみから導けるのは $\sum_n \frac{v_n}{g(A_n)} < \infty$ の時である．ここで $\sum_n 1/(n \log\log n) = \infty$ であることを思い出すと、この収束限界は重複対数の法則と異なることが分かる．よって (1) は落とすことができない．

また分散より弱いヘッジの場合も似た結果が得られる．このことから Marcinkiewicz-Zygmund strong law([5]) が，独立同分布ではない場合には成り立たないことが分かる．

3. Realityの勝利戦略を作る方法について

ゲーム論的確率論では Skeptic と Reality のゲームを考えることで定理を表現する．定理 2.1 と定理 2.2 はそれぞれ，あるゲームにおいて Skeptic または Reality に勝利戦略が存在することに対応している．そしてゲーム論的確率論の面白い点は，「決定論的な」勝利戦略を作ることで，確率の定理を証明できることにある．今まで多くの Skeptic の決定論的な勝利戦略が作られ，定理が証明されてきた．一方 Reality の勝利戦略を作ることは難しくほとんど知られていなかった．

講演者らは Skeptic の戦略を利用することで Reality の「決定論的な」戦略を作る一般的な方法を与え，それを使って上記の定理を示した．この方法では Reality の戦略は Skeptic の戦略から自動的に作られるため，一般にはとても複雑な Reality の具体的な戦略を作る必要がない．これは大きなメリットであり，今後，定理の限界を調べる上で有用な方法であると思われる．

参考文献

[1] E. Fisher. On the law of the iterated logarithm for martingales. *Ann. Probab.*, 20(2):675–680, 1992.

[2] P. Hartman and A. Wintner. On the law of the iterated logarithm. *American J. Math.*, 63:169–176, 1941.

[3] A. Y. Khinchin. Über einen Satz der Wahrscheinlichkeitrechnung. *Fund. Mat.*, 6:9–20, 1924.

[4] A. N. Kolmogorov. Über das Gesetz des Iterierten Logarithmus. *Math. Ann.*, 101:126–135, 1929.

[5] J. Marcinkiewicz and A. Zygmund. Sur les fonctions indépendantes. *Fund. Math.*, 29:60–90, 1937.

[6] K. Miyabe and A. Takemura. Convergence of random series and the rate of convergence of the strong law of large numbers in game-theoretic probability. *Stochastic Processes and their Applications*, 122:1–30, 2012.

[7] G. Shafer and V. Vovk. *Probability and Finance: It's Only a Game!* Wiley, 2001.

[8] W. F. Stout. A martingale analogue of Kolmogorov's law of the iterated logarithm. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 15:279–290, 1970.