微分可能な点はどこにあるか

京都大学　数理解析研究所　宮部賢志

2012年3月26日

ランダムネスの理論

- アルゴリズム情報理論の一分野（？）
- 計算可能性理論、確率論、予測理論などと深い関わりを持つ
- 測度空間上のある点がランダムかどうかを議論できる

ランダムネスの階層

弱 2 ランダムネス

$\cap$

Martin-Löf ランダムネス

$\cap$

計算可能ランダムネス

$\cap$

Schnorr ランダムネス

$\cap$

Kurtz ランダムネス

微分可能性

定理 (Lebesgue 1904)

すべての単調増加関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ はほとんど至る所で (almost everywhere) 微分可能

関数 f が有界変動 (bounded variation) であるとは

$$\sup \sum_{i=1}^{n-1} |f(t_{i+1} - f(t_i)| < \infty$$

ただし，$0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots t_n \leq 1$

Jordan の定理より有界変動関数は 2 つの単調増加関数の差なので，すべての有界変動関数 f はほとんど至る所で微分可能

ほとんど至る所とは？

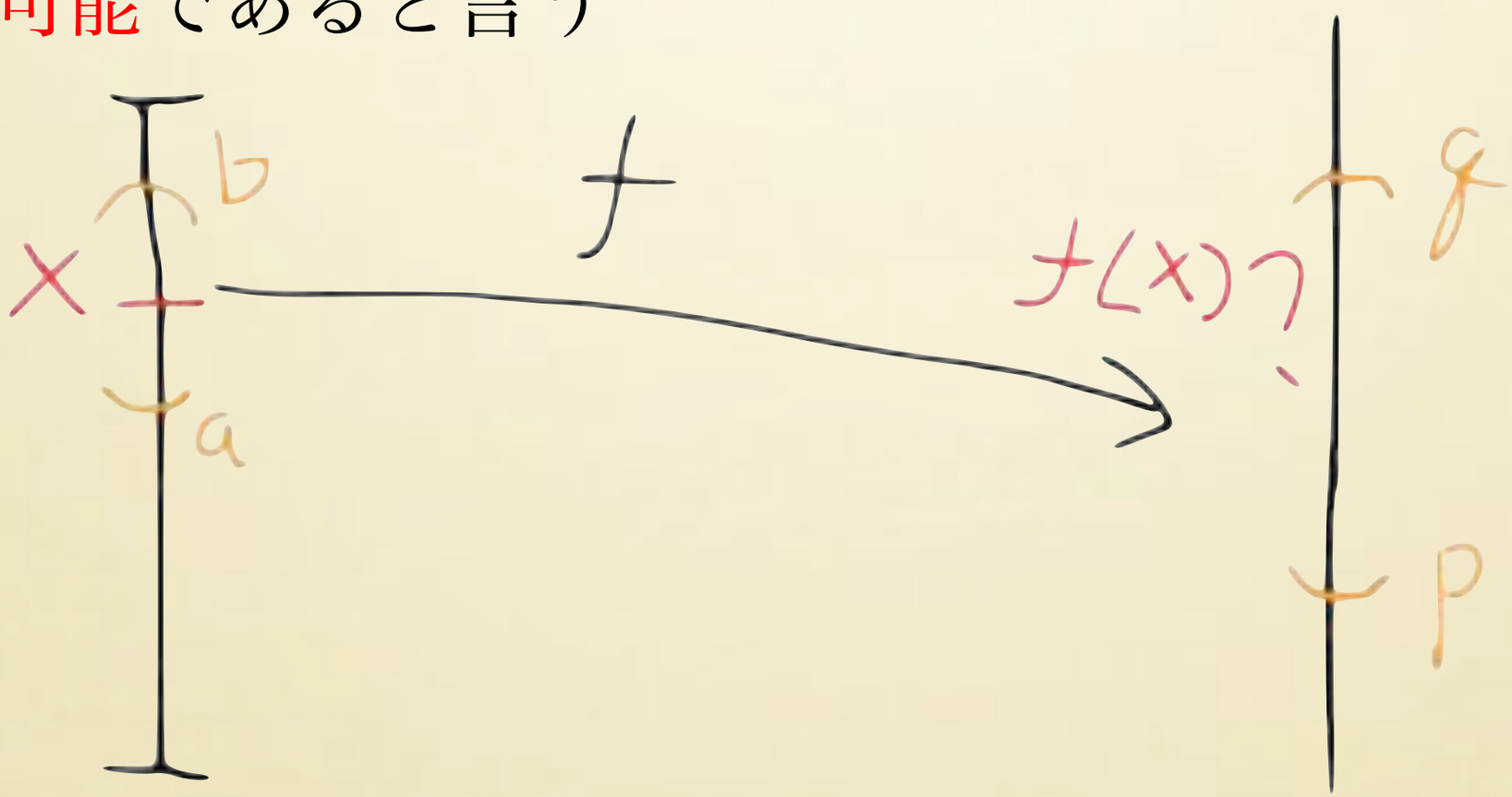
具体的にどの点で微分可能だろうか？

- $N(f) = \{x \mid f$ は x で微分可能 $\}$
- すべての f で $\mu(N(f)) = 1$
- すべての点 x である f が存在して、$x \notin N(f)$
- 可算の加法族 C に対しては $\mu(\bigcap_{f \in C} N(f)) = 1$

そこで計算可能な関数の族を考える

計算可能性

実数上の可算開基 (countable base) として $\{(p,q) \mid p,q \in \mathbb{Q}\}$ を固定する．開集合が開基の計算可能な和であるとき c.e. であると言い，各開基の f による逆像が一様に c.e. であるとき、f は計算可能であると言う



MLランダムネス

C を計算可能な有界変動関数の集合とすると

$$\mu(\bigcap_{f \in C} N(f)) = 1$$

定理 (Demuth 1975, Brattka, Miller, Nies to appear)

$x \in [0,1]$ が Martin-Löf ランダム

$\iff$ すべての $f \in C$ に対し f は x で微分可能

その他のランダムネス

定理 (Brattka, Miller, Nies to appear)

x が弱 2 ランダム $\iff$

すべての計算可能で至る所微分可能な関数 f が x で微分可能

定理 (Brattka, Miller, Nies to appear)

x が計算可能ランダム

$\iff$ すべての計算可能な単調関数 f が x で微分可能

定理 (Freer, Kjos-Hanssen, Nies to appear)

x が計算可能ランダム

$\iff$ すべての計算可能な Lipschitz 関数 f が x で微分可能

Schnorrランダムネス

定理 (Freer, Kjos-Hanssen, Nies to appear)

x が Schnorr ランダム

$\iff$ すべての「変動ノルムで計算可能」な Lipschitz 関数 f が x で微分可能

Kurtzランダムネス

定理 (M.)

K を以下を満たす関数の族とする

1. 計算可能
2. 微分が拡張実数への関数として計算可能

このとき、x が Kurtz ランダム

$\iff$ すべての $f \in K$ が x で微分可能

階層の対応

<table>
<tr><td>弱2ランダムネス</td><td>至る所微分可能</td><td rowspan="3">古典的性質</td></tr>
<tr><td>MLランダムネス</td><td>有界変動</td></tr>
<tr><td>計算可能
ランダムネス</td><td>単調 or Lipschitz</td></tr>
<tr><td>Schnorr
ランダムネス</td><td>変動ノルムで
計算可能</td><td rowspan="2">+計算可能性</td></tr>
<tr><td>Kurtz
ランダムネス</td><td>微分が拡張実数
への計算可能</td></tr>
</table>

微分定理

定理 (微分定理)

積分可能な f に対しほとんど至る所

$$f(x) = \lim_{r \to 0} \frac{\int_{B_r(x)} f d\mu}{\mu(B_r(x))}$$

ここで $B_r(x) = (x - r, x + r)$

この等式が成り立つ点を Lebesgue 点という

Schnorrランダムネス(1/2)

定義 (L^1 計算可能性)

ある関数 f に対し，計算可能な有理数係数多項式の列 f_n があって，

$$||f - f_n||_1 \leq 2^{-n}$$

となる時．f は L^1 計算可能であると言う

また $\hat{f} = \lim_n f_n$ とおく

Schnorrランダムネス(2/2)

定理 (Pathak-Rojas-Simpson, Rute)

以下は同値

- x は Schnorr ランダム
- $\hat{f}(x)$ がすべての L^1 計算可能関数に対して定義される
- すべての L^1 計算可能関数 $\hat{f}$ の Lebesgue 点である

積分テスト

積分可能な下側半計算可能関数 $f : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ を積分テストと言う．x が ML ランダム $\iff$ すべての積分テスト f に対して $f(x) < \infty$

定理 (M.)

計算可能な積分値を持つ積分テストを

Schnorr ランダムネスに対する積分テストと呼ぶ

x が Schnorr ランダム

$\iff$ すべての Schnorr ランダムネスに対する積分テスト f に対して $f(x) < \infty$

自然な関数族の発見

定理 (M.)

以下の関数の Schnorr ランダムな点に制限した関数の族は一致する

1. 2 つの Schnorr ランダムに対する積分テストの差
2. L^1 計算可能関数 $\hat{f}$
3. 計算可能な L^1 ノルムを持つ Schnorr layerwise 計算可能関数

積分テストの階層

<table>
<tr><td>弱2ランダムネス</td><td>至る所有限</td><td rowspan="3">区間ごとの
積分値が
計算可能でない</td></tr>
<tr><td>MLランダムネス</td><td>積分可能</td></tr>
<tr><td>計算可能
ランダムネス</td><td>?</td></tr>
<tr><td>Schnorr
ランダムネス</td><td>積分値が
計算可能</td><td rowspan="2">区間ごとの
積分値が
計算可能</td></tr>
<tr><td>Kurtz
ランダムネス</td><td>拡張実数
への計算可能</td></tr>
</table>

階層の対応

<table>
<tr><td>弱2ランダムネス</td><td>至る所微分可能</td><td rowspan="3">古典的性質</td></tr>
<tr><td>MLランダムネス</td><td>有界変動</td></tr>
<tr><td>計算可能
ランダムネス</td><td>単調 or Lipschitz</td></tr>
<tr><td>Schnorr
ランダムネス</td><td>変動ノルムで
計算可能</td><td rowspan="2">+計算可能性</td></tr>
<tr><td>Kurtz
ランダムネス</td><td>微分が拡張実数
への計算可能</td></tr>
</table>

References

[1] V. Brattka, J. S. Miller, and A. Nies. Randomness and differentiability. Submitted.

[2] O. Demuth. The differentiability of constructive functions of weakly bounded variation on pseudo numbers. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 16(3):583–599, 1975.

[3] C. Freer, B. Kjos-Hanssen, and A. Nies. Computable aspects of Lipshitz functions. To appear.

[4] H. Lebesgue. *Leçons sur l'Intégration et la recherche des fonctions primitives*. Gauthier-Villars, Paris, 1904.

[5] K. Miyabe. Characterization of kurtz randomness by a differentiation theorem. submitted.

[6] N. Pathak, C. Rojas, and S. G. Simpson. Schnorr randomness and the lebesgue differentiation theorem. To appear in Proceedings of the American Mathematical Society.