独立同分布でない場合の大数の法則の収束速度

〜ゲーム論的確率論からのアプローチ〜

宮部賢志

京都大学

数理解析研究所

竹村彰通

東京大学

情報理工学系研究科

2012年3月27日

K. Miyabe and A. Takemura.

Convergence of random series and the rate of convergence of the strong law of large numbers in game-theoretic probability.

Stochastic Processes and their Applications, 122:1–30, 2012.

重複対数の法則(1/2)

定理 (重複対数の法則; Hartman-Wintner 1941)

$\{X_n\}$ を平均 0, 分散 1 の独立同分布確率変数列とする．$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ とおくと、ほとんど確実に

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{(2n \log\log n)^{1/2}} = 1$$

X_n の取る値が 0,1 の場合は Khinchin(1924) による

重複対数の法則(2/2)

定理 (重複対数の法則; Kolmogorov 1929)

$\{X_n\}$ を平均 0、分散 σ_n^2 の独立な確率変数列とする．$A_n = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$ とおき、$A_n \to \infty$ を仮定する．さらにある正の列 $\{M_n\}$ があって、以下が成り立つとしよう．

$$M_n = o\left(\left(\frac{A_n}{\log\log A_n}\right)^{1/2}\right), \ |X_n| \leq M_n \text{ a.s.}$$

このとき、ほとんど確実に

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{(2A_n \log\log A_n)^{1/2}} = 1$$

2つの拡張の方向

- マルチンゲールによる表現
  (Stout 1970, Fisher 1992)
  平均 $\to$ 条件付き平均 m_n, 分散 $\to$ 条件付き分散 v_n
- 上限 M_n を外す

ゲーム論的確率論

Players: Forecaster, Skeptic, Reality

Protocol:

$\mathcal{K}_0 = 1$.

FOR $n = 1, 2, \ldots$:

Forecaster announces $m_n \in \mathbb{R}$ and $v_n > 0$.

Skeptic announces $M_n \in \mathbb{R}$ and $V_n \geq 0$.

Reality announces $x_n \in \mathbb{R}$.

$\mathcal{K}_n := \mathcal{K}_{n-1} + M_n(x_n - m_n) + V_n((x_n - m_n)^2 - v_n)$.

Collateral Duties: Skeptic must keep $\mathcal{K}_n$ non-negative. Reality must keep $\mathcal{K}_n$ from tending to infinity.

直感的には・・・

- Forecaster→測度，Skeptic→マルチンゲール
- マルチンゲールが有限となる列の集合の測度は1
- Skepticがある性質を保ちながら,
  資金を無限大に発散できれば,
  その性質を持つ集合の測度は0

収束

定理 (M. & Takemura)

g を正の単調増加関数とする．このプロトコルにおいて Skeptic は以下を強制できる．

$$\sum_n \frac{v_n}{g(A_n)} < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{k\le n} \frac{x_k - m_k}{\sqrt{g(A_k)}} \text{が収束}$$

特に $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ の場合は，

$$A_\infty = \infty \text{ かつ} \sum_n \frac{v_n}{g(A_n)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sum_{k\le n}(x_k - m_k)}{\sqrt{g(A_k)}} \to 0$$

ここで $A_n = \sum_{k\le n} v_n$， $A_\infty = \lim_n A_n$.

発散

定理 (M. & Takemura)

g を正の単調増加関数とする．このプロトコルにおいて Reality は以下を順守できる．

$$\sum_n \frac{v_n}{g(A_n)} = \infty \Rightarrow \frac{\sum_{k\le n}(x_k - m_k)}{\sqrt{g(A_k)}} \text{が収束しない}$$

.

重複対数の法則との比較

ここで重複対数の法則に対応するように

$$g(x) = x \log\log x,\ \ v_n = 1$$

とおくと,

$$\sum_n \frac{v_n}{g(A_n)} = \sum_n \frac{1}{n \log\log n} = \infty$$

すなわち「上限の条件」を外すと，異なる限界になる事が分かる.

どうやって見つけるか？

- 収束の方向の証明は,
  「マルチンゲールの2乗が劣マルチンゲール」
  から素直に出てくる

- 発散の方向は
  「Skepticの戦略を利用してRealityの戦略を作る」
  ことで導かれる

- この戦略を作る一般的な方法も与えた

この手法のメリットは？

- ゲーム論的確率論の枠組みに従えば,
「ある性質を持つ測度の存在」が
「ゲームの戦略を作る事」で示せる
- 「決定論的な戦略」を作る事で
集合の詳細な比較ができる.

今後の研究内容

- 上限のない重複対数の法則→高澤(神戸大学)
- 重複対数の法則には2乗ヘッジだけでは足らないらしい．一般に定理の複雑さとプロトコルの複雑さには対応関係があるのでは？
- 同様にRealityの戦略も集合のBorel hierarchyに応じて一様に作れるのでは？

参考文献

[1] P. Hartman and A. Wintner. On the law of the iterated logarithm. *American J. Math.*, 63:169–176, 1941.

[2] A. Y. Khinchin. Über einen Satz der Wahrscheinlichkeitrechnung. *Fund. Mat.*, 6:9–20, 1924.

[3] A. N. Kolmogorov. Über das Gesetz des Iterierten Logarithmus. *Math. Ann.*, 101:126–135, 1929.

[4] K. Miyabe and A. Takemura. Convergence of random series and the rate of convergence of the strong law of large numbers in game-theoretic probability. *Stochastic Processes and their Applications*, 122:1–30, 2012.

[5] G. Shafer and V. Vovk. *Probability and Finance: It's Only a Game!* Wiley, 2001.