

なぜ確率0のことが 起こるのか



京都大学数理解析研究所 宮部賢志

2012年3月20日

自己紹介

- ❖ 名前：宮部賢志（みやべけんし）
- ❖ 出身：岐阜県岐阜市
- ❖ 分野：数学、計算機科学
- ❖ algorithmic randomness, computable analysis, sequential prediction, game-theoretic probability

ランダムは使えるか？

- ❖ 疑似乱数生成
- ❖ 暗号
- ❖ 乱択アルゴリズム (Randomized algorithm)

なぜランダムネスが重要か

- ❖ 確率、統計の弱点を補う
- ❖ 確率の概念に新たな見方を与える
- ❖ 予測限界と計算の関係を記述できる

話の構成

- ❖ 確率の数学の歴史
- ❖ ランダムネスの理論の誕生
- ❖ 確率の哲学の再考察

確率の数学の歴史

古典確率

- ❖ Laplace (1749-1827)
- ❖ 「確率論の解析理論」
「確率の哲学的試論」
- ❖ 確率とは「同程度の確か
らしさの事象の割合」
- ❖ 中学高校で習う確率



from Wikipedia

公理主義的確率論

- ❖ Kolmogorov (1903-1987)
- ❖ 『確率論の基礎概念』
(1933)
- ❖ 公理とは議論の出発点
- ❖ 確率の意味を問わない



from Wikipedia

後で確率を計算してはいけない

1	表	表	表	表	表	表	表	表	表	表	表	表	表	表	表
2	表	裏	表	裏	裏	表	表	裏	裏	裏	表	裏	裏	表	裏

2回のコイン投げの結果

どちらも確率は同じ

確率が小さいからと言って1回目のコイン投げが不自然とは言えない

同じ理屈で、ずっと表が出続ける確率は0だが「起こらない」とは言えない

この矛盾をどう理解すれば良いか？

参考

- ・『確率で世の中を見る』数学セミナー2012年3月号
- ・確率統計は「創作科学」であり、「確率現象は存在しない」

岡山大学 金谷健一 『確率統計を学ぶにあたって』より

確率論はあてにならない？

(浜岡原発付近の地震確率として)「87%」を発表した政府の地震研究機関は、福島原発については大地震の確率を0%としていた。それで、「確率0%でも巨大地震に見舞われたのだから、全ての原発が危ない」という反対派の主張になった。「0%でもこのうえなく危険」ということになったのでは、もはや地震予知に実際上の意味はない。(中略)あてにならない確率論で全原発停止への流れを作った菅首相の責任は小さくない。

産経新聞2011年7月1日『外交評論家・岡本行夫「確率」だけで原発止めるな』より

問題点

- ❖ 「確率0」と「確率が小さい」の区別
- ❖ ”正しい確率”は存在するか？
- ❖ 客観確率と主観確率の区別
- ❖ 確率0のことは起こるのか？

ランダムネスの理論の誕生

ランダムな列とは？

- ❖ Kolmogorov (1903-1987)
- ❖ 頻度主義者
- ❖ アルゴリズム情報理論の創始者の一人



from Wikipedia

Kolmogorov 複雑性(1/2)

例えば,

A=0000000000 0000000000 0000000000 0000000000

B=0100111010 0110100110 1100110011 1111001101

Aには短い表現があるが、Bには短い表現はなさそう

よって、Bの方が複雑であると判定できる

コイン投げの結果として自然かどうか判定できる

Kolmogorov複雑性(2/2)

$$K(\sigma) = \min\{|\tau| \mid U(\tau) = \sigma\}$$

U: 万能Turingマシン, 文字列から文字列へのprefix-freeの計算可能関数で「最も良く圧縮できる」関数

K: 文字列の情報量を表す指標

ランダムな列とは？

- ❖ P. Martin-Löf (1942-)
- ❖ 直観主義型理論の創始者
- ❖ 統計の概念を使って
最初の自然なランダム
の概念を定義



from Wikipedia

Martin-Löf ランダムネス

$$\begin{aligned} & A \text{ is Martin-Löf random} \\ & \text{iff} \\ & (\exists d)(\forall n)K(A \upharpoonright n) > n - d \end{aligned}$$

ML-randomnessの定義は1966年

複雑性による特徴付けはLevin 1973, Schnorr 1973,

Chaitin 1975などによる

確率0の問題は数学的にも解決された

後から規則を見つけることも許されるようになった

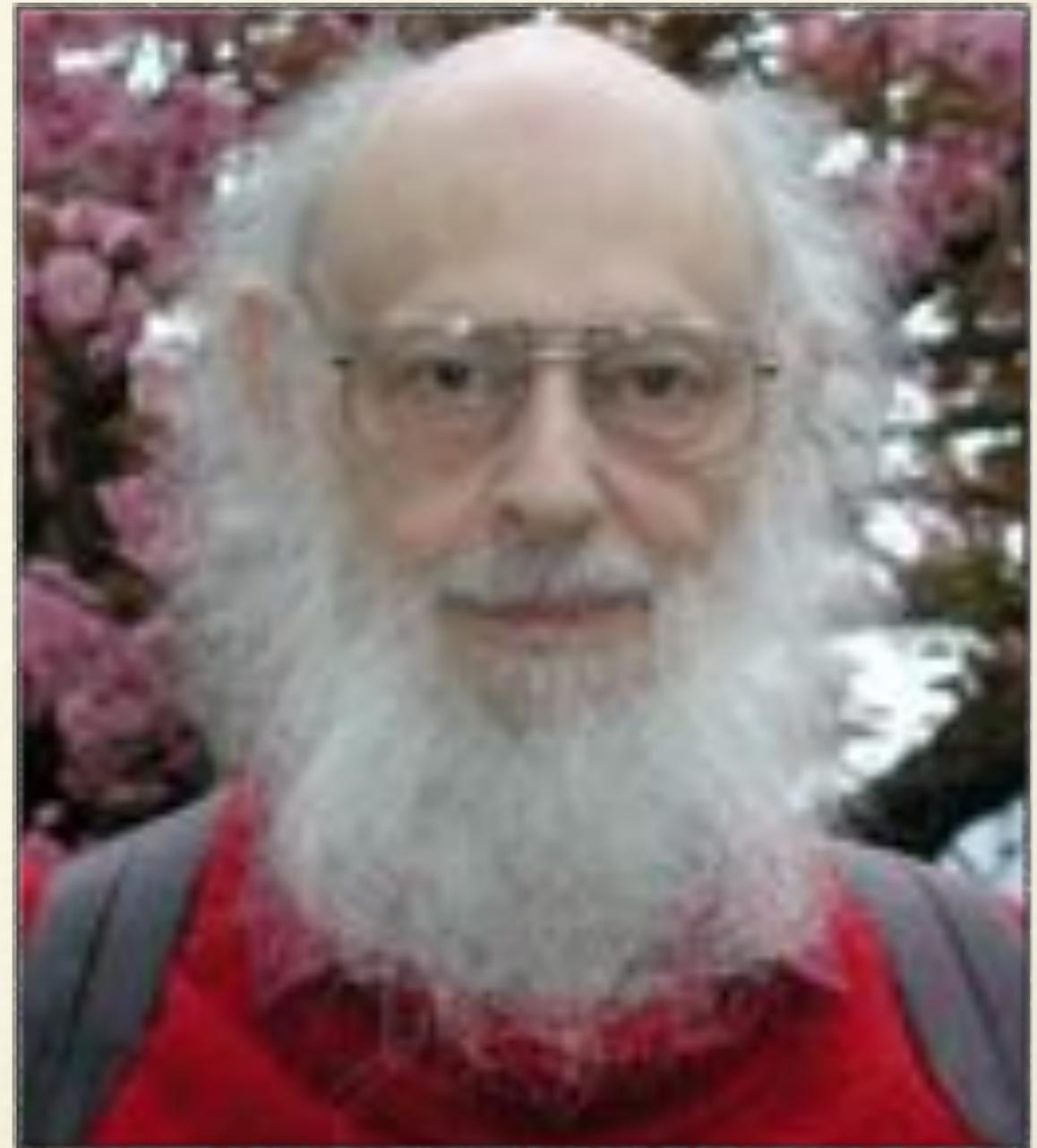
ただし対象は文字列に対してのみであり

確率論を書き換えるほどには一般的ではない

確率の哲学の再考察

R. Solomonoff (1926-2009)

- ❖ アルゴリズム情報理論の創始者の一人
- ❖ 特に人工知能への応用に携わった
- ❖ Kolmogorov複雑性の発見



from his website

確率とは予測である

$$M(x) = \sum_{p:U(p)=x^*} 2^{-l(p)}$$

SolomonoffのUniversal Prior 1964, 1978

(t-1)番目まで分かっている時のt番目の確率を以下で定義する

$$M(x_t|x_{<t}) = \frac{M(x_{1:t})}{M(x_{<t})}$$

Solomonoff自身はこの理論をalgorithmic probabilityと呼んだ

しかしKolmogorovの確率の公理とは矛盾する（例えば加法性が成り立たない）

一般的にはsequential predictionと呼ばれている

この確率は当初、客観確率であると主張していたが、

ごく最近、晩年になって、主観確率として認識されるようになった

主觀確率

For quite some time I felt that the dependence of ALP (Algorithmic Probability) on the reference machine was a serious flaw in the concept, and I tried to find some “objective” universal device, free from the arbitrariness of choosing a particular universal machine. When I thought I finally found a device of this sort, I realized that I really didn't want it - that I had no use for it at all!

Solomonoff (2009)

確率哲学

- ❖ 古典確率 — Laplace 1814
- ❖ 頻度説 — von Mises 1919
- ❖ 主観説 — Ramsey 1926, De Finetti 1930
- ❖ 傾向説 — Popper 1957

Kolmogorovによる確率の公理は1933の発表

確率の始まり

- ❖ Pascal と Fermat 1654 — 掛け金の分配
- ❖ Arnauld 1662 — Aleatory vs. Epistemic
- ❖ Bernoulli 1654-1705 — 非加法的

確率 m が加法的であるとは、

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow m(A \cup B) = m(A) + m(B)$$

非加法的な確率論理としてはDempster-Shafer Theoryなど

ランダムから確率へ

- ❖ von Misesの頻度説による確率論
- ❖ Solomonoffのalgorithmic probability
- ❖ ゲーム論的確率論
- ❖ 最小記述量の理論

提案

ランダムネスの理論から確率を捉え直すとは？

- ❖ 主観確率→非加法的な予測
- ❖ 頻度説→確率が定まる集合が限定される
- ❖ 傾向説→確率0のことは起きない

確率0はなぜ起きない？

A	計算可能	起きない	$\{A\} \in \Pi_1^0$
B	ランダム	起きる	$\{B\} \notin \Pi_1^0$

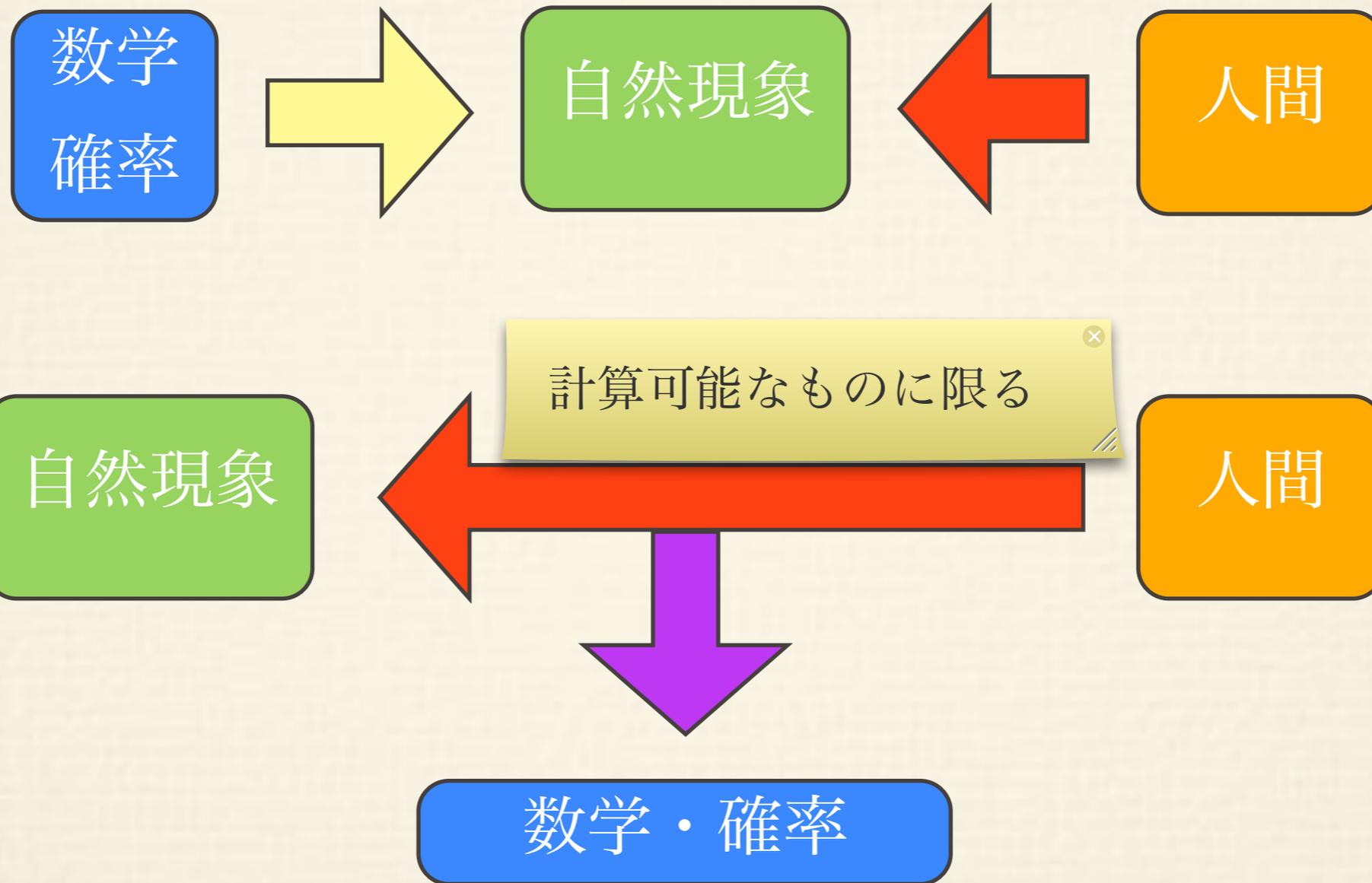
(ある意味で) 計算可能な集合に限れば

確率0のことは起きない

確率の矛盾を解くには

”計算可能”の概念が必要

確率はどこにあるか？



Alan Turing (1912-1954)

- ❖ イギリス、ケンブリッジ大学
- ❖ 数学者、暗号解読者、計算機科学者
- ❖ エニグマの解読
- ❖ チューリングマシンの提唱

TURING

CENTENARY CONFERENCE

CiE 2012: How the World Computes
University of Cambridge 18-23 June, 2012

An historic celebration of Alan Turing's unique impact on mathematics, computer science, biology, artificial intelligence, philosophy and the wider scientific world.

Plenary talks

Bill Aspinwall (London)	Richard Dawkins (Oxford)
Stephen Hawking (Cambridge)	Markus Perser (Cambridge)
Leslie Greengard (Cambridge)	James Watson (Cambridge)
Barry Swinburn (Cambridge)	David Deutsch (Cambridge)
Paul Smolenski (Cambridge)	Paul Smolenski (Cambridge)
Andy Binstock (Cambridge)	Leslie Greengard (Cambridge)

Public lecture by Sir David Attenborough (Cambridge)

Special sessions

The Universal Turing Machine and History of the Computer
Class 1 (18-19 June)

Biography, Philosophy and Neuroscience
Class 2 (19-20 June)

The Turing Test and Thinking Machines
Class 3 (20-21 June)

Computational Models After Turing: The Genetic Turing Test and Beyond
Class 4 (21-22 June)

Mathematical Philosophy in Contemporary Theoretical Neuroscience
Class 5 (22-23 June)

Open Problems in the Philosophy of Neuroscience
Class 6 (23-24 June)

Registration

Registration is open for all interested individuals. Registration is free for all individuals who are currently registered with the University of Cambridge. Registration is free for all individuals who are currently registered with the University of Cambridge. Registration is free for all individuals who are currently registered with the University of Cambridge.

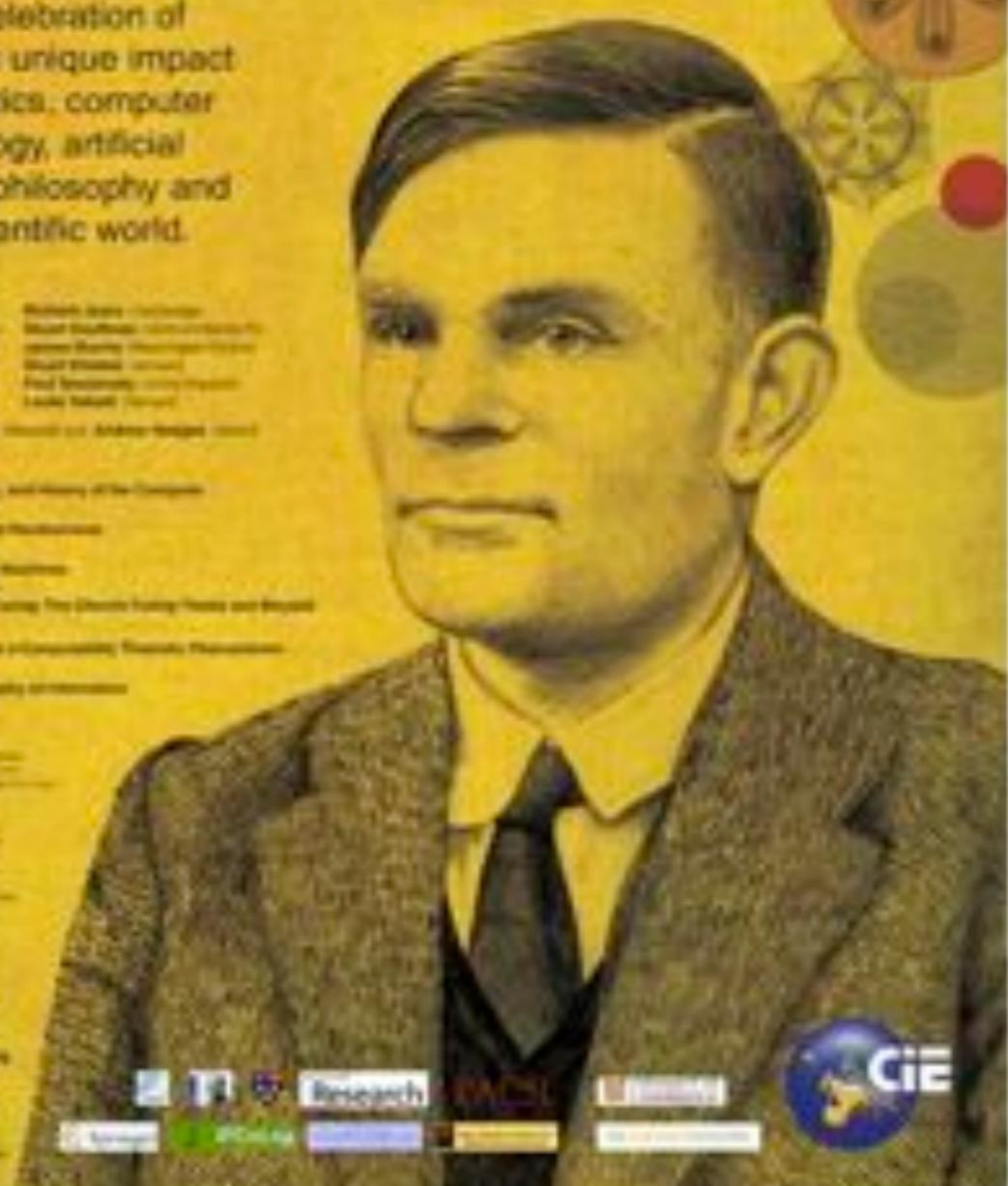
Organisers

Organisers: Alan Turing Society, Cambridge University, and the University of Cambridge.

Public should be notified by

January 20, 2012

www.cie2012.eu



計算可能性理論

- ❖ 計算可能性の概念の定式化 (1936)
- ❖ ノイマン型コンピュータの実現 (1950頃)
- ❖ ランダムの数学的定式化 (1966)
- ❖ 確率の数学的定式化? (20??)

まとめ

- ❖ 起こった後から規則を見つけても良い
- ❖ 確率とは主観的な信念の度合いである
- ❖ 確率0は起こらないと仮定できる数学的体系を作る事ができる