

アルゴリズム的観点 から見た確率解釈



京都大学 CAPEレクチャー
2012年5月29日(火)

宮部賢志
京都大学 数理解析研究所

自己紹介 & 概要

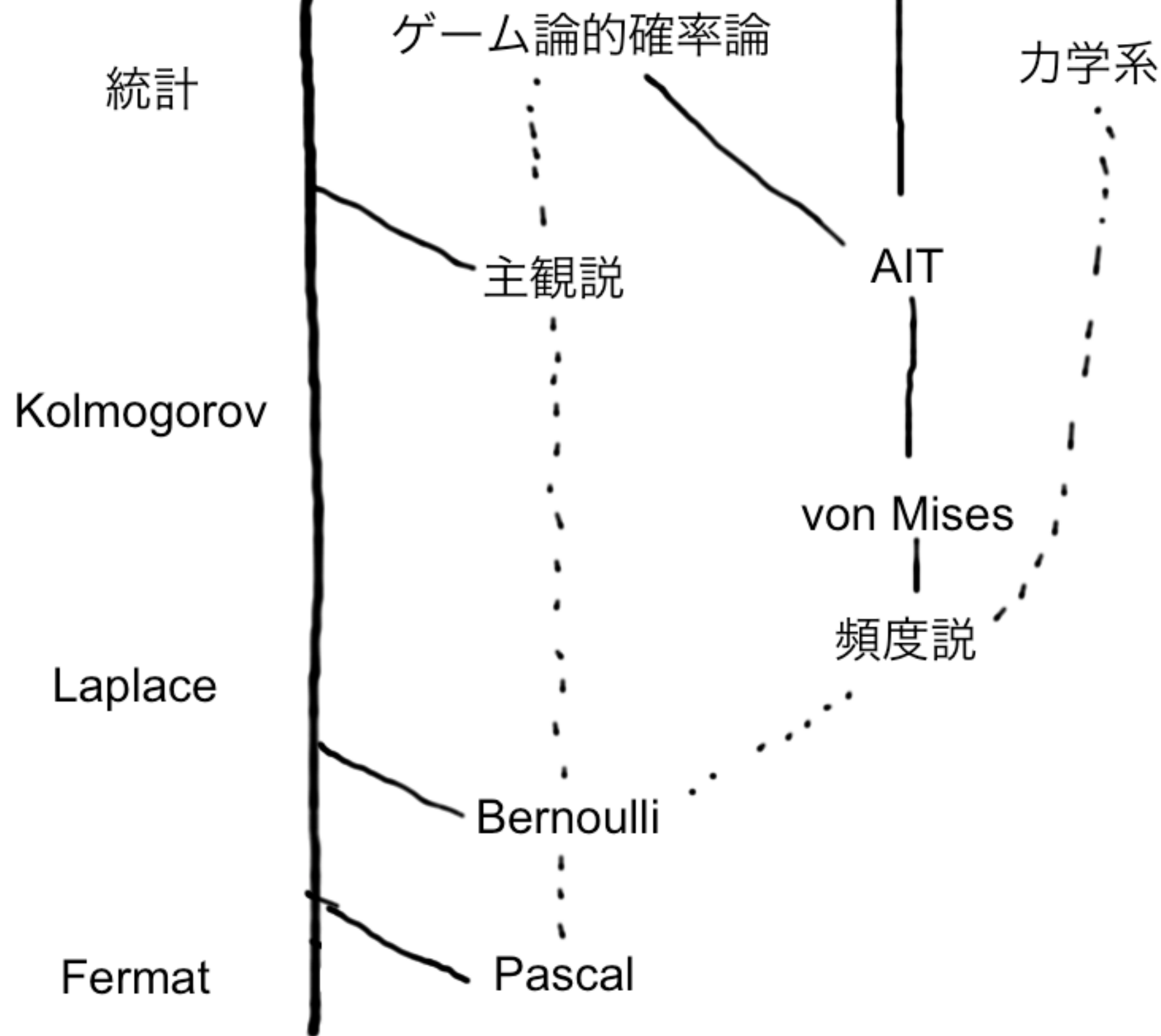
自己紹介

- ❖ 宮部賢志（みやべけんし）
- ❖ 京都大学数理解析研究所
特定研究員（グローバルCOE）
- ❖ algorithmic randomness, computable analysis,
algorithmic probability, game-theoretic probability
- ❖ 計算, ランダム, 確率, 予測の概念の関係

数学から見た確率

~~~~~

- ❖ 古典確率 — Laplace (18c)
- ❖ 測度論的確率論 — Kolmogorov (1933)
- ❖ その他雑多な確率論



# 概要

---

- ❖ 確率哲学の歴史
- ❖ アルゴリズム的ランダムネスの理論と  
その周辺
- ❖ アルゴリズム的確率

# 確率哲学の歴史

# 確率とは

確率論の基礎から応用まで、確率の概念と計算方法を詳しく解説する。

- ❖ 「アルゴリズム的確率」は、通常使われる「確率」とは数学的にも概念としても異なる
- ❖ 確率概念は決定論的もしくはキリスト教的 세계觀の影響がある
- ❖ 紀元前は確率（偶然）をどのように捉えていたか

# Aristotle (B.C.384-322)

---

- ❖ 「偶発的なものは科学的に取り扱えないとみなさねばならない」 『形而上学』
- ❖ 自己偶発的な原因を”Tyche”または”automaton”などと呼んだ 『自然学』
- ❖ 科学の中での偶然性の研究の否定 『確率論の黎明』 (安藤洋美)より

# Augustine (354-430)

---

- ❖ 「その原因は至るところにある神の手により操作されるもので、その意味で無作為な(random)ものは何もないし、偶運(chance)なるものは存在しない」  
『八十三の問題について』
- ❖ 「すべては神の摂理に従う」 『神の国』
- ❖ 17世紀まで確率計算の発生を抑止した原因を作った 『確率論の黎明』 (安藤洋美)より

# Thomas Aquinas

~~~~~

- ❖ 1225-1274
- ❖ 「聖なる教え(神学)は，哲学者たちが自然理性により真理を知り得た場合には，彼らの権威をも用いる・・・しかし，聖なる教えはかかる権威をいわば教えの外の蓋然的論拠(Argumenta probabilia)として用いるにすぎない。」 『神学大全』
- ❖ 確信の度合い

確率論の始まり

~~~~~

- ❖ Pascal と Fermat の往復書簡(1654)
- ❖ 掛け金の配分問題
- ❖ probability という言葉は出てこない。  
あえて使わなかった？
- ❖ 「公平な賭け + 帰納法」と「組み合わせ」とにより解かれた

# Pascal

~~~~~

- ❖ Pascal (1623-1662)
- ❖ パスカルの三角形,
パンセ,
パスカルの原理
- ❖ 「公平な賭け＋帰納法」
により解いた

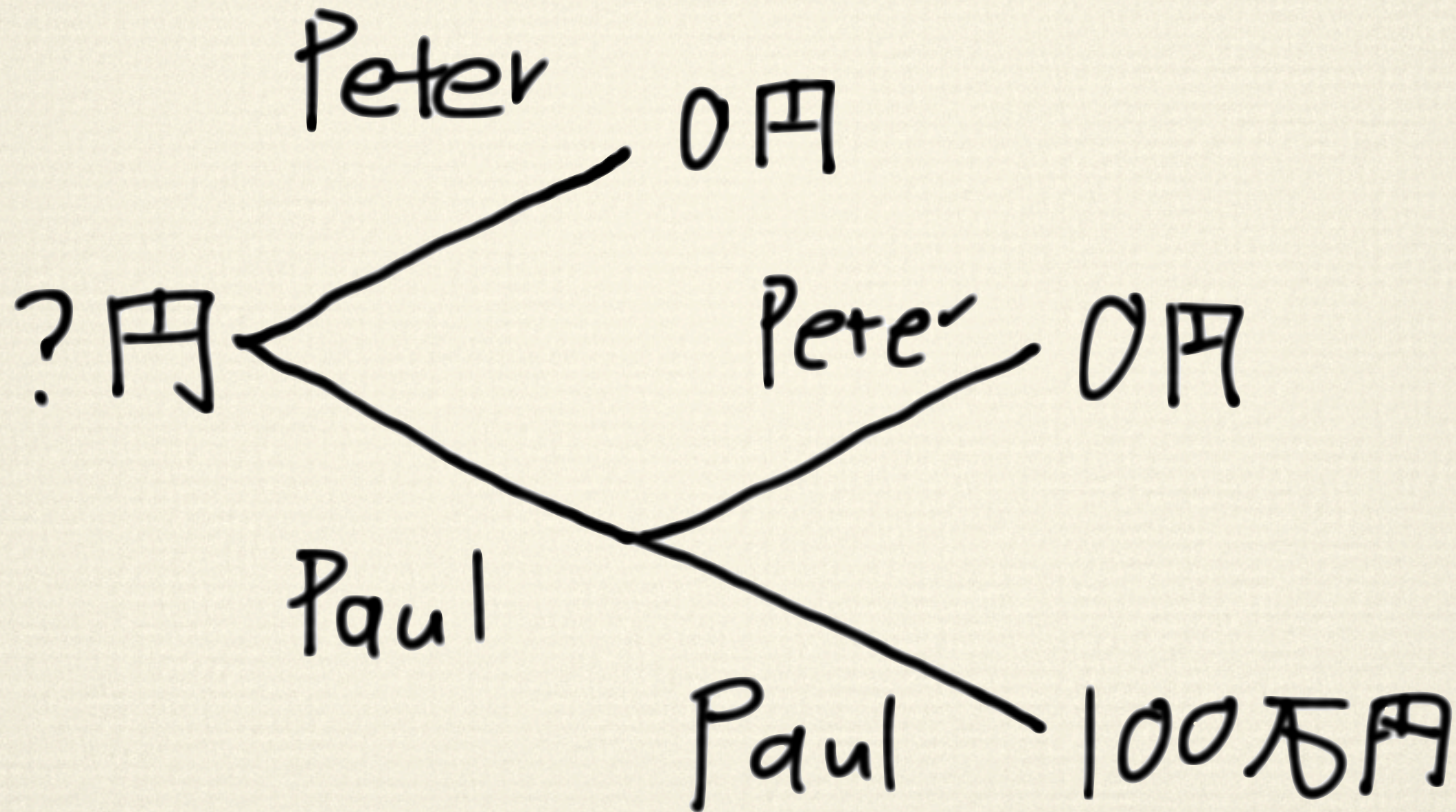


Pascalの方法(1/4)

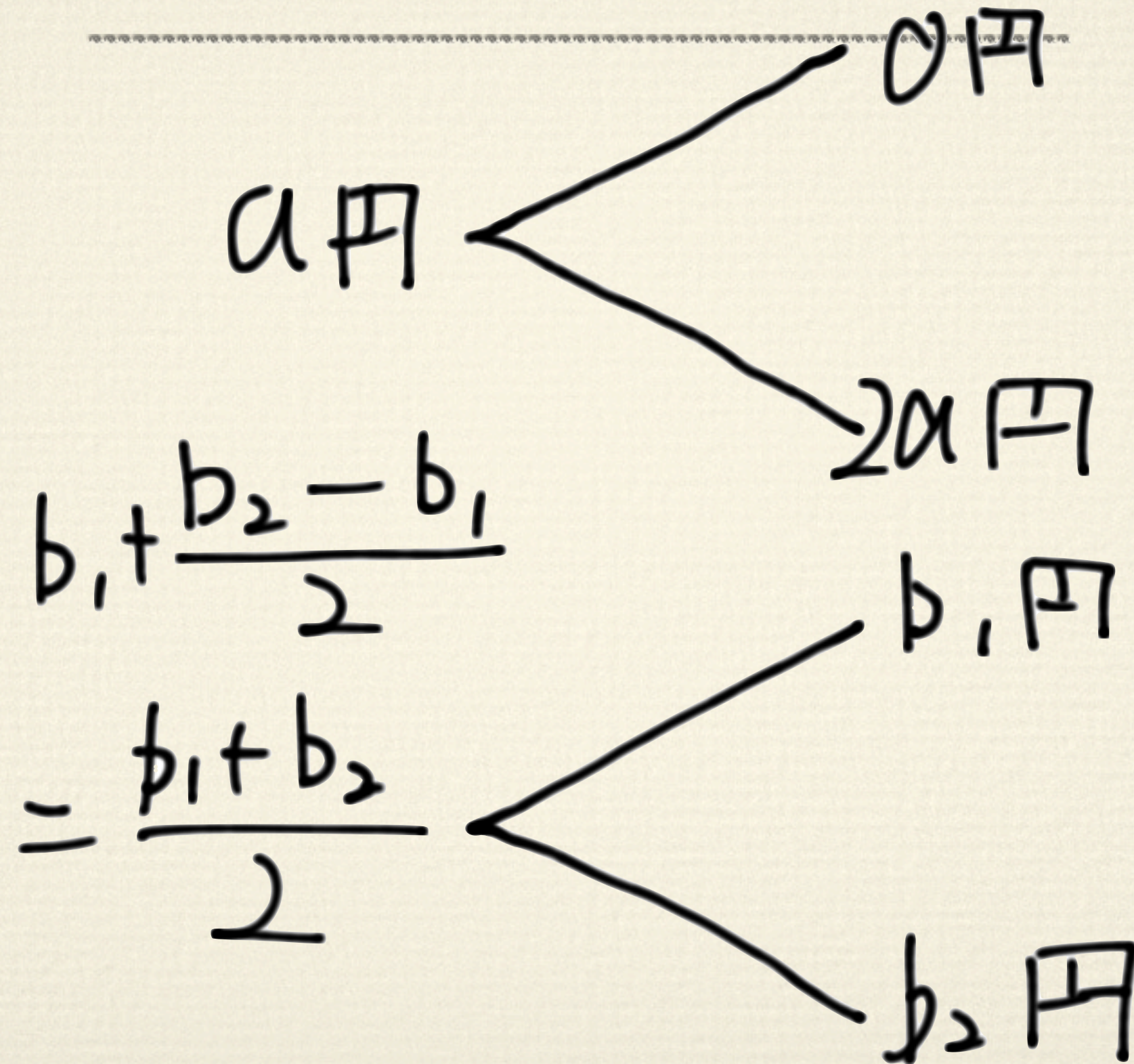
~~~~~

- ❖ 掛け金100万円, プレイヤーPeterとPaulは勝利までそれぞれあと1点と2点足りない. どう配分すべきか?
- ❖ 「同じ条件で争うことが公平」であるという原理

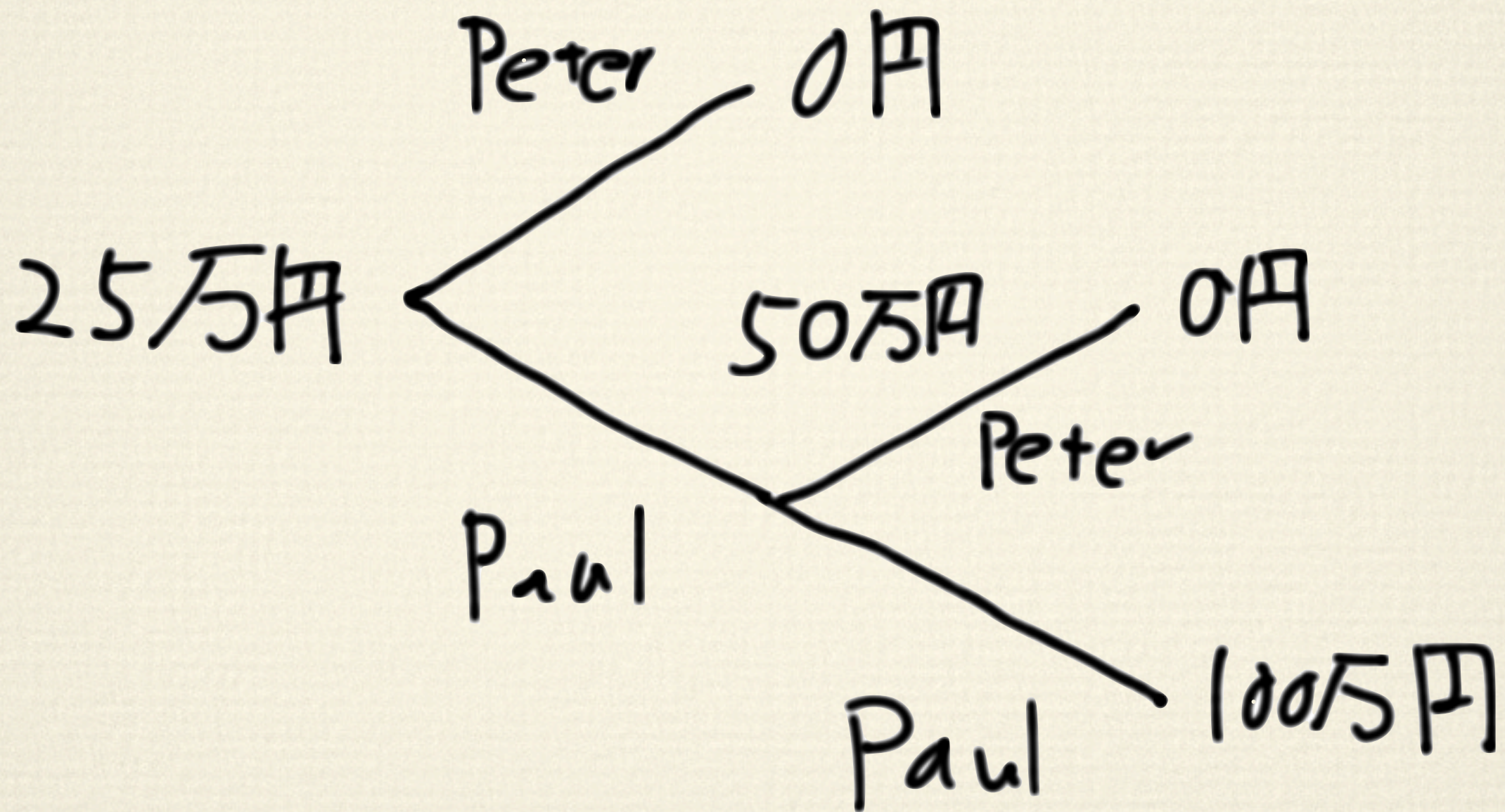
# Pascalの方法(2/4)



# Pascalの方法(3/4)



# Pascalの方法(4/4)



# Fermat

- ❖ Fermat (1607or08-1665)
- ❖ 数学は余暇
- ❖ 数論の父
- ❖ 最終定理
- ❖ 「組み合わせ」により解く



# Fermatの方法

---

- ❖ 決まった回数だけプレイを続けるものと想像しよう
- ❖ 組み合わせの数によって配分
- ❖ 非常に楽！

# Arnauld

Arnauld, Antoine (1612-1694) was a French philosopher, theologian, and logician. He is best known for his work in logic and metaphysics, particularly his collaboration with Blaise Pascal on the Port-Royal Logic. The image shows a portrait of Arnauld, a man with long, dark hair, wearing a dark, high-collared garment, seated at a desk and writing with a quill pen. A small inkwell and other writing materials are visible on the desk.

- ❖ Arnauld (1612-1694)
- ❖ “The Port-Royal Logic”



# 確率概念の始まり

確率論の発展と確率論の応用

- ❖ 「10人の人が各人1クラウン賭けるゲームがあり、彼らのうちの一人だけが買って全部をせしめ、他の人々が皆失うとしよう. (中略) 彼が1クラウン失い、9クラウンを得ないのは、各々の場合9倍も確からしい. 」 “The Port-Royal Logic”
- ❖ G. Shafer (1978) “Non-additive Probabilities in the Work of Bernoulli and Lambert”
- ❖ I. Hacking (1975) “The Emergence of Probability”

# Probability と Chance

---

- ❖ 「公平な賭け」と「組み合わせの数」
- ❖ external evidence and internal evidence (Arnauld)
- ❖ epistemic probability and aleatory probability
- ❖ subjective probability and objective probability ?

# Laplace

- ❖ Laplace (1749-1827)
- ❖ 古典確率の集大成
- ❖ 決定論者 (cf. ラプラスの悪魔) で、確率は我々の無知に起因すると考えた
- ❖ コペンハーゲン解釈と矛盾するか？



# 古典確率

確率論の発展と応用

- ❖ 古典確率の集大成
- ❖ 「一定数の同等に可能な場合，すなわちそれらが存在するかどうかについてわれわれが決めかねる程度が同じである場合に帰着させ・・・」 『確率の哲学的試論』

# Hilbert

~~~~~

- ❖ Hilbert (1862-1943)
- ❖ 現代数学の父
- ❖ 1900年の国際数学者会議
での「23の問題」



確率の公理化

確率論の公理化は、1900年の国際数学者会議で「23の問題」の第6問題として提起された。この問題は、物理学が公理化できるかどうかを問うものであった。この問題の解決は、確率の公理化の道を開いた。この公理化は、幾何学の公理化と同様に、厳密な取り扱いを求めた。

- ❖ 1900年の国際数学者会議での「23の問題」
- ❖ 第6問題「物理学は公理化できるか」
- ❖ 確率の厳密な取り扱いとして、幾何学のよ
うな公理化を求めた

Kolmogorov

~~~~~

- ❖ Kolmogorov (1903-1987)
- ❖ ロシアの数学者
- ❖ 確率論,  
位相幾何学,  
アルゴリズム情報理論



# 公理主義的確率論

~~~~~

- ❖ 『確率論の基礎概念』 (1933) で
「公理主義的確率論」 を提唱
- ❖ 自身は頻度主義者
- ❖ その使いやすさから確率に対する立場を問
わず使われている

確率の公理

~~~~~

以下を満たす 3 つ組  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  を確率空間という

1.  $\mathcal{F}$  は集合体 (加法族)
2. 各  $A \in \mathcal{F}$  に対して,  $P(A) \geq 0$  が定まっていて,  $A$  の確率という
3.  $P(\Omega) = 1$
4.  $A \cap B = \emptyset$  なら  $P(A + B) = P(A) + P(B)$

最後の性質は有限加法性と呼ばれる

# 連続性の公理

5.  $A_n \in \mathcal{F}$  に対し,

$$A_n \downarrow \emptyset \Rightarrow P(A_n) = 0.$$

これに対して、無限空間では、連続性の公理5は公理1-4と独立である。この新しい公理は、無限確率空間に対してのみ本質的なものであるから、（中略）公理に経験的な意味を与えることはまず不可能である。観察可能な確率過程を記述して得られるのは、有限な確率空間だけであって、無限確率空間は現実の確率現象を理想化したモデルにすぎない。ここでは著者の独断によって、公理5を満たすモデルだけに限定する。このように限定することが、さまざまな研究を行ううえで都合だからである。『確率論の基礎概念』

# 確率の哲学

---

- ❖ 主観説—Ramsey (1926), de Finettiらによる  
賭け比率と同一視する
- ❖ 頻度説—von Mises (1919)による  
後に詳しく説明
- ❖ 傾向説—Popper (1957)による

# 公理は妥当か？

~~~~~

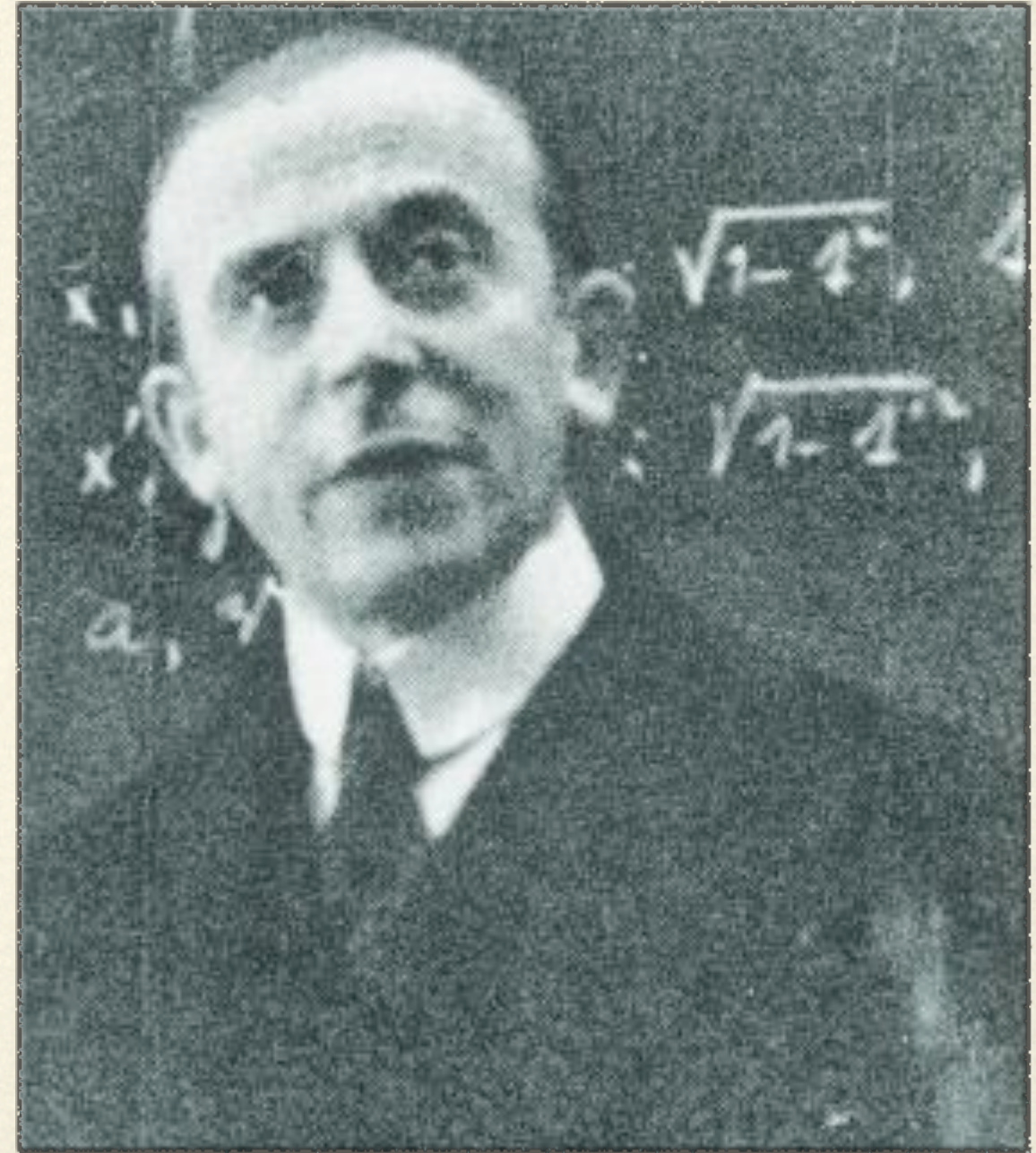
- ❖ de Finettiらは主観主義の立場から無限加法的性に対して批判
- ❖ Keynesの確率論では確率は数値では表現できないとした
- ❖ Dempster-Shafer理論では非加法的な確率を許す

アルゴリズム的ランダムネス の理論とその周辺

von Mises (1883-1953)

~~~~~

- ❖ von Mises (1883-1953)
- ❖ 1919年の論文に始まり,  
確率の頻度説の数学的定  
式化を試みた



# collectiveから確率へ

~~~~~

- ❖ “First collective, then probability”に集約される
「ランダムな列の頻度として確率が定まる」
- ❖ 繰り返し行われる事象についてのみ確率は定義され、その確率の正確な値は分からない。
それはちょうど幾何学において線分の長さの正確な長さが分からないようなもの。

基本的な考え方

~~~~~

- ❖ 集合 $\{0,1\}$ を考える
- ❖ 実現系列として0,1の無限列が表れる
- ❖ その表れる列はcollectiveであるとする
- ❖ 1の出る確率はそのcollectiveの相対頻度の極限
- ❖ ある事象の確率を仮定し，別の事象の確率を求める

# collective とは

ある 2 進無限列  $A \in 2^\omega$  が以下を満たすとき, collective であると言う.

1. 相対頻度の極限が存在する. すなわち,

$$\frac{\sum_{i=1}^n A(i)}{n} \rightarrow p \in [0, 1].$$

2. 適当な  $A$  の部分列  $B$  の相対頻度の極限も同じ値になる.

$$\frac{\sum_{i=1}^n B(i)}{n} \rightarrow p \in [0, 1].$$

[illegible]

- \_\_\_\_\_

# collectiveは適切か？

---

定理 (Ville 1939)

$p = \frac{1}{2}$  の collective で重複対数の法則を満たさないものが存在する

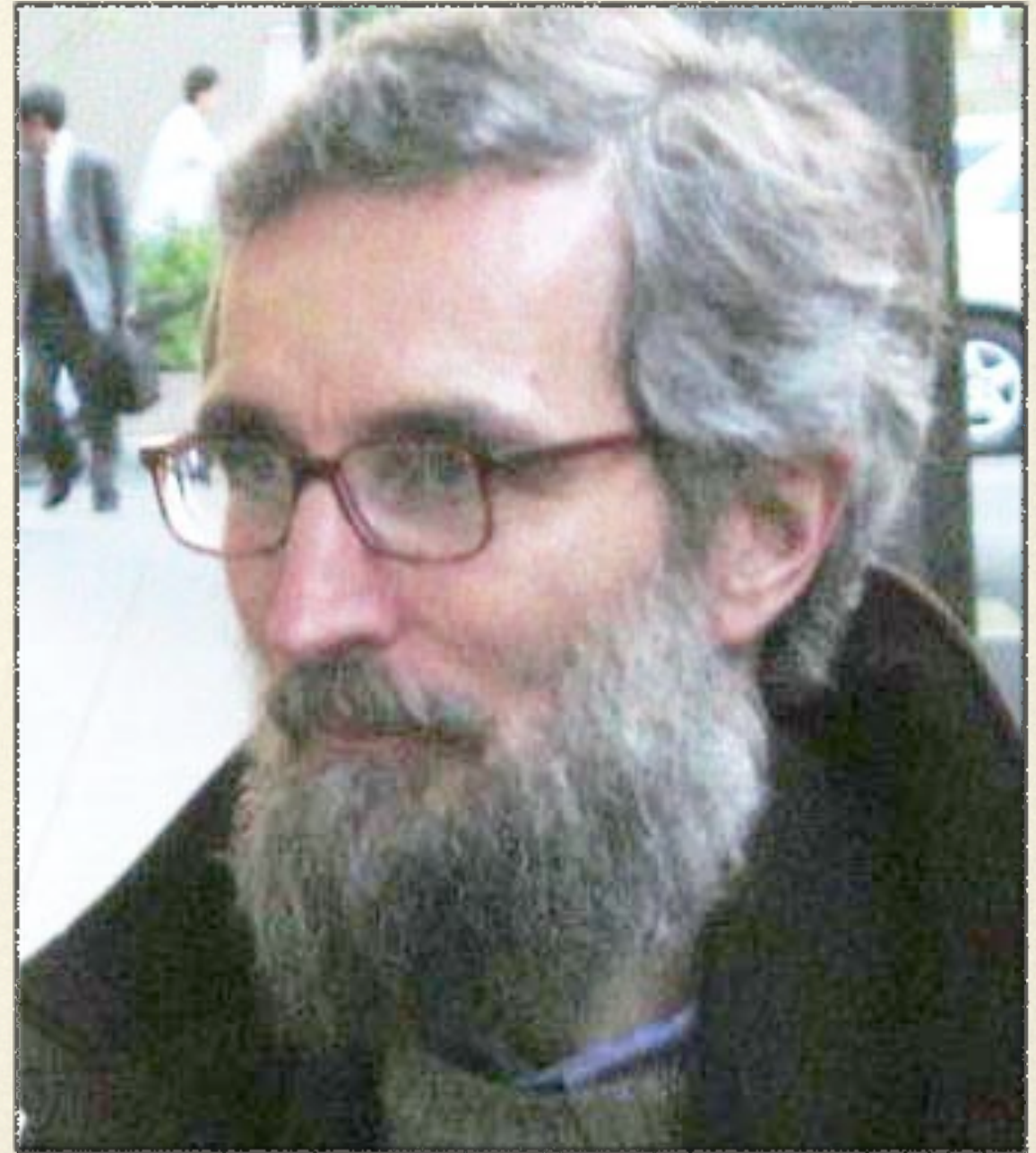
定理 (Khintchine 1924)

$$\limsup_n \frac{S_n}{(2n \log \log n)^{1/2}} = 1 \text{ a.s.}$$

# Martin-Löf

~~~~~

- ❖ Martin-Löf (1942-)
- ❖ 直観主義型理論



Martin-Löf ランダムネス

~~~~~

- ❖ Martin-Löf ランダムネス (1966)
- ❖ 測度1の列が大数の法則を満たす。  
一つの統計的性質
- ❖ 「すべての」統計的性質を満たす列は存在しないので、「計算可能な」統計的性質を満たすものを考える

# マルチンゲール

定義 (Ville)

関数  $d : 2^* \rightarrow \mathbb{R}^+$  が以下を満たす時, マルチンゲールであると言う.

$$d(\sigma) = \frac{d(\sigma 0) + d(\sigma 1)}{2}.$$

定理 (Schnorr 1971)

ある列  $A \in 2^\omega$  が Martin-Löf ランダムであることと, すべての c.e. マルチンゲール  $d$  に対して,

$$d(A \upharpoonright n) < O(1)$$

であることは同値.

# 複雑性

~~~~~

定義 (Solomonoff 1964, Schnorr 1973, Levin 1973)

文字列 $\sigma \in 2^* \cup 2^\omega$ に対し,

$$Km(\sigma) = \min\{|\tau| : \sigma \preceq U(\tau)\}$$

を σ の **monotone complexity** と呼ぶ.

ここで U は万能 monotone マシンである.

.

複雑性による特徴付け

~~~~~

定理 (Schnorr 1973, Levin 1973)

2 進無限列  $A \in 2^\omega$  が ML ランダムであることと,

$$Km(A \upharpoonright n) > n - O(1)$$

であることは同値.

.

[illegible]

- 
- A portrait of an elderly man with a long, flowing white beard and mustache. He is wearing large, rectangular, silver-rimmed glasses. He is dressed in a bright red, textured sweater. The background is filled with out-of-focus pink cherry blossoms, suggesting a spring setting. The man is looking directly at the camera with a slight smile.

# アルゴリズム的確率入門

## 定義

関数  $M : 2^{<\omega} \rightarrow \mathbb{R}^+$  が,  $M(\epsilon) = 1$ ,

$$M(\sigma) = (\geq) M(\sigma 0) + M(\sigma 1)$$

を満たす時,  $M$  を (半) 測度と呼ぶ.

半測度  $M$  が以下を満たす時, 最適 (optimal) であると言う:  
任意の半測度  $N$  に対して, ある定数  $C$  が存在し, すべての  $\sigma$   
で,  $C \cdot M(\sigma) \geq N(\sigma)$ .

# 最適な半測度

~~~~~

定理 (Solomonoff 1964) 関数 M を以下で定義する.

$$M(\sigma) = \sum_{p: \sigma \preceq U(p)} 2^{-|p|}.$$

この時 M は最適な半測度となる.

Solomonoffの結果

ある $x \in 2^\omega$ に対して以下のようにおく：

$$M(x_n | x_{<n}) = \frac{M(x_{1:n})}{M(x_{<n})}.$$

定理 (Solomonoff 1978)

計算可能な測度 μ に対して,

$$\frac{M(x_n | x_{<n})}{\mu(x_n | x_{<n})} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が μ 確率 1 で成り立つ.

解釈

- ❖ Epicurus (B.C.341?-)
“If more than one theory is consistent with the data, keep them all.”
- ❖ William of Ockham (1288-1348)
“Keep the simplest theory consistent with the observations.”
- ❖ 2つの方法の組み合わせ

アルゴリズム的確率とは

~~~~~

- ❖ アルゴリズム的確率は新しい確率の概念を提唱している.
- ❖ にも関わらず, ほとんど注目されていない.
- ❖ なぜか?

# 欠点（と見なされてきたこと）

~~~~~

- ❖ 計算不可能性
- ❖ 万能マシンの非一意性
- ❖ 設定への強い制限
- ❖ 確率概念？（収束の意味は？非加法的？）

概念の輸出

- ❖ 最小記述長の理論
- ❖ ゲーム論的確率論
- ❖ AIXI Model

計算可能解析の発展

~~~~~

- ❖ 実数から実数への関数が計算可能とはどういうことか？
- ❖ 位相空間上の点，集合，関数が計算可能とは？
- ❖ 測度空間上の点がランダムであるとは？

[illegible]

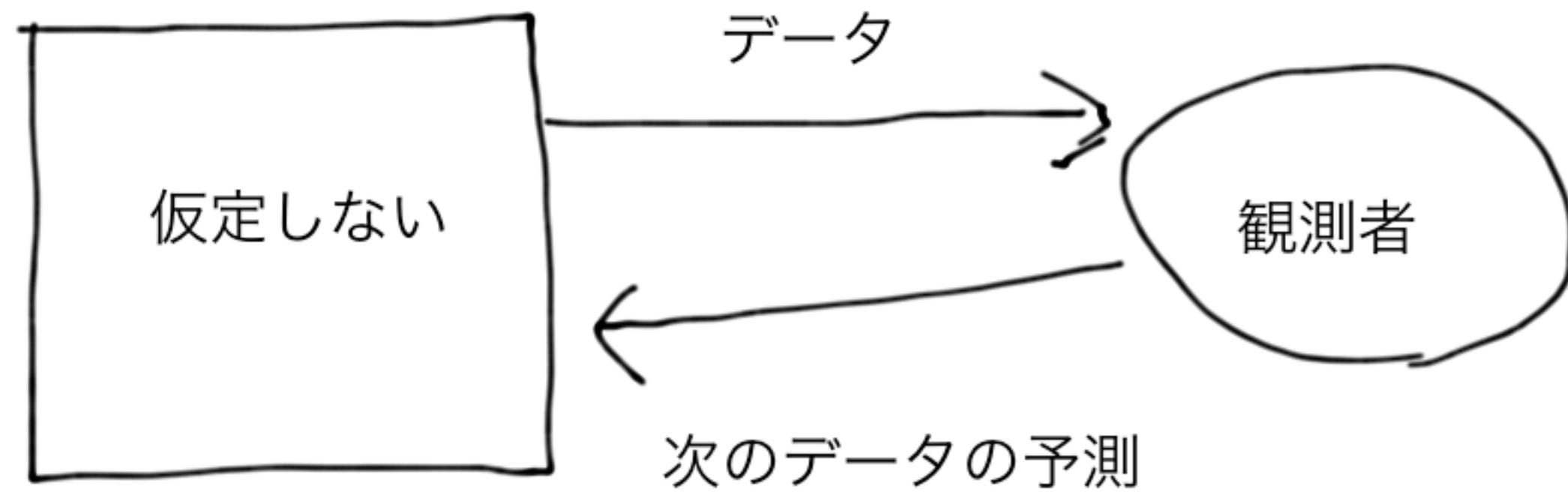
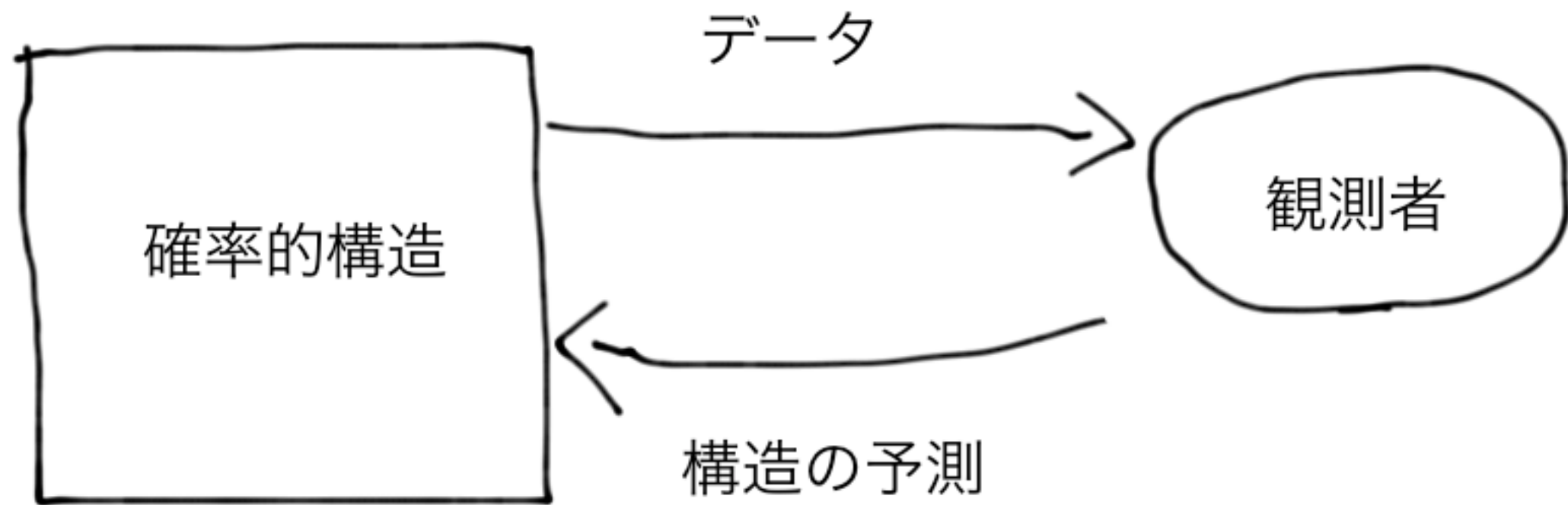
- # 確率の概念

# アルゴリズム的確率

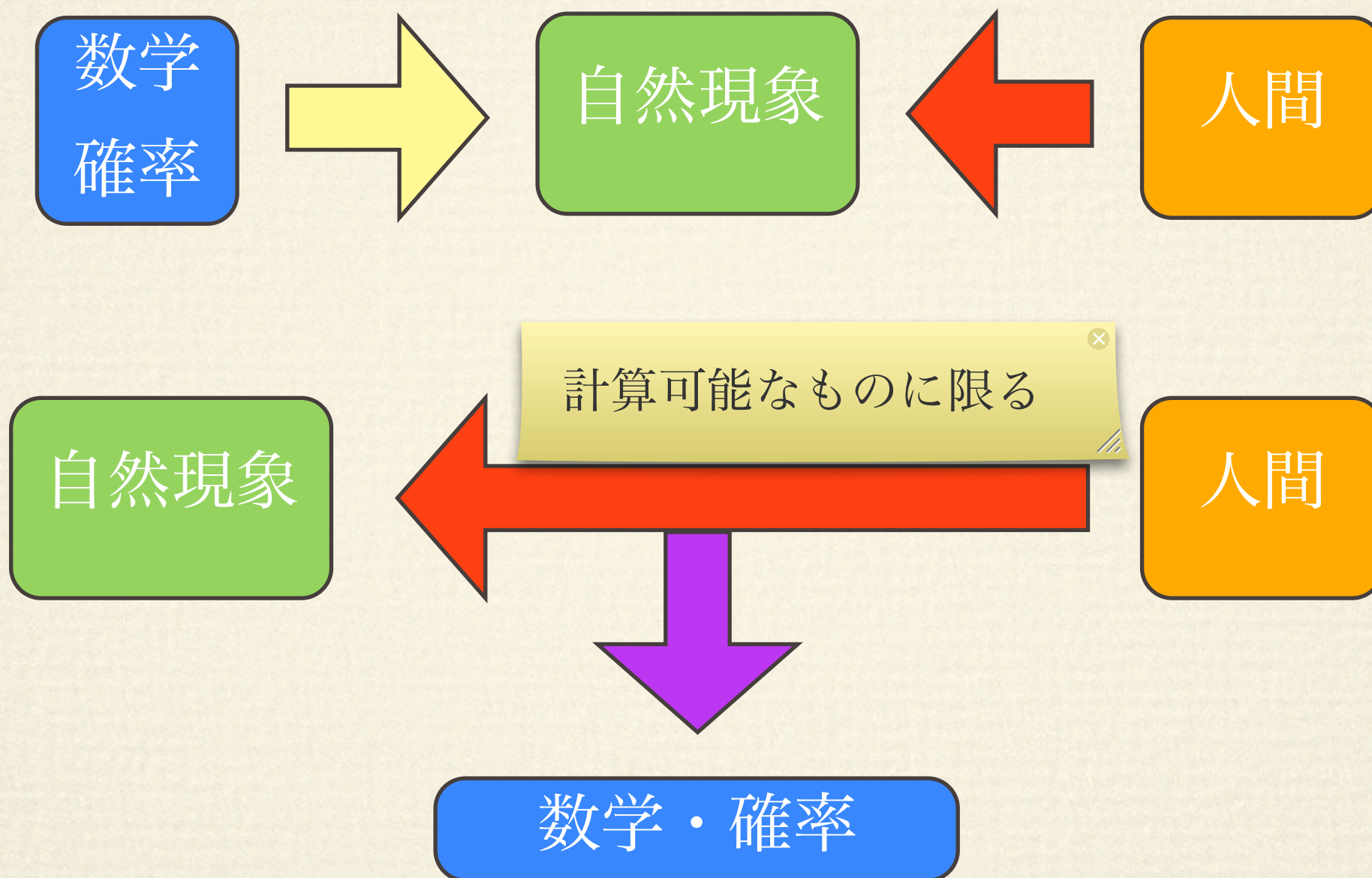
# Prequential Probability

---

- ❖ Prequential=Predictive + Sequential  
by Dawid in game-theoretic probability
- ❖ モデルを仮定しない
- ❖ Aristotle的？



# 確率はどこにあるか？



# 確率論はあてにならない？

(浜岡原発付近の地震確率として)「87%」を発表した政府の地震研究機関は、福島原発については大地震の確率を0%としていた。それで、「確率0%でも巨大地震に見舞われたのだから、全ての原発が危ない」という反対派の主張になった。「0%でもこのうえなく危険」ということになったのでは、もはや地震予知に実際上の意味はない。(中略)あてにならない確率論で全原発停止への流れを作った菅首相の責任は小さくない。

産経新聞2011年7月1日『外交評論家・岡本行夫「確率」だけで原発止めるな』より

# コペンハーゲン解釈

~~~~~

- ❖ 確率的に振る舞っているように見える
- ❖ 確率的に振る舞うモデルを考える
- ❖ この2つは異なる
- ❖ 「神はサイコロを振らない」 by Einstein
- ❖ 道具主義

主觀確率

For quite some time I felt that the dependence of ALP (Algorithmic Probability) on the reference machine was a serious flaw in the concept, and I tried to find some “objective” universal device, free from the arbitrariness of choosing a particular universal machine. When I thought I finally found a device of this sort, I realized that I really didn’t want it - that I had no use for it at all!

Solomonoff (2009)

.....

サイコロ

~~~~~

- ❖ 実在論的 — サイコロは6面あり，どれも同じぐらいありそうだ
- ❖ 認識論的 — これまでたくさんのサイコロを振り，頻度が $1/6$ でそれ以外の規則がみつからない

# 認識論的な確率論

~~~~~

	傾向説	頻度説	主観説
一般的には	客観確率		主観確率
私見では	実在論的	認識論的	
Pascal &Fermat	組み合わせ	賭けの公平さ	
Arnauld	internal evidence	external evidence	
定式化	Laplace, Hilbert, Kolmogorov	game-theoretic, Solomonoff	

確率とは何か？

- ❖ Arnauldによる同一視から確率は始まったが、この同一視は「適切」であろうか？
- ❖ 確率の多元主義的見方 by D. Gillies in “Philosophical Theories of Probability” (2000)

統計の立場から

~~~~~

|                  |                    |                     |
|------------------|--------------------|---------------------|
| 一般的に考えられている立場    | 中心人物               | ランダムネスから見ると？        |
| 頻度説              | Neyman,<br>Pearson | 計算可能性として頻度のみを考慮している |
| 相対頻度に基礎を置く信頼性の尺度 | Fisher             |                     |
| 主観説              | Bayesian           | 計算可能性が考慮されていない      |

# 予測理論としての立場

| 予測に利用する性質 | 理論          |
|-----------|-------------|
| 典型性       | 統計・情報理論     |
| 予測不可能性    | 統計的決定理論     |
| 圧縮不可能性    | 情報量規範・最小記述長 |

- ❖ アルゴリズム的信息理論では、これら3つの性質は本質的に同じもの
- ❖ 予測理論として統一的な扱いができるはず

# 確率とランダムネス

確率とランダムネスの関係を理解するための図式

図式

データ →

測度（確率） + その測度でランダム

# 測度は何を意味するか？

~~~~~

- ❖ 典型的 → 確率を想定している？
- ❖ 予測不可能性 → 胴元の予測
- ❖ 圧縮不可能性 → 見つけられるだろう規則

確率とランダムネス2

図 2.1: 確率とランダムネスの関係

図式 2

データ →

見つけられた規則

+ その測度（規則）でランダム

連続性の公理について

~~~~~

- ❖ 傾向説 → 可算加法性が成り立つ
- ❖ 頻度説 → 有限加法性は成り立つが,  
可算加法性は成り立たない
- ❖ 主観説 → 加法性を認めるかどうかは任意

# まとめ

---

- ❖ アルゴリズム的確率は認識論的確率である
- ❖ 計算可能性の概念を通して，客観的（と認めても良さそう）な確率の概念が現れる
- ❖ 異なる確率の概念には，異なる定式化が必要