Lowness notions

京都大学　数理解析研究所　計算機科学セミナー

*2012*年*6*月*7*日

宮部賢志

京都大学　数理解析研究所

目次

- Martin-Löfランダムネス
- lowの概念について
- Schnorrランダムネス

Martin-Löfランダムネス

Martin-Löfランダムネス

Cantor 空間 2^ω を考える．

文字列 σ に対し，$[\![\sigma]\!] = \{A \in 2^\omega \ : \ \sigma \prec A\}$ と定義する．

開集合 U が c.e. であるとは，$U = \bigcup_{\sigma \in S} [\![\sigma]\!]$ となる c.e. 集合 S が存在することを言う．

定義 (Martin-Löf 1966)

ML テストとは一様 c.e. の開集合列 $\{U_n\}$ で $\mu(U_n) \leq 2^{-n}$ であるものを言う．ある列 $A \in 2^\omega$ が ML ランダムであるとは，すべての ML テストに対し $A \notin \bigcap_n U_n$ である時に言う．

マルチンゲール

定義 (Ville)

関数 $d: 2^* \to \mathbb{R}^+$ が以下を満たす時，マルチンゲールであると言う．

$$d(\sigma) = \frac{d(\sigma 0) + d(\sigma 1)}{2}.$$

定理 (Schnorr 1971)

ある列 $A \in 2^\omega$ が Martin-Löf ランダムであることと，すべての c.e. マルチンゲール d に対して，

$$d(A \upharpoonright n) < O(1)$$

であることは同値.

Kolmogorov複雑性

prefix-free な万能 Turing マシン U に対して，文字列 σ の Kolmogorov 複雑性を

$$K(\sigma) = \min\{|\tau| \ : \ U(\tau) = \sigma\}$$

で定義する．

定理 (Levin 1973, Schnorr 1973, Chaitin 1975)
列 A が ML ランダムであることと以下は同値.

$$K(A \upharpoonright n) > n - O(1).$$

Lowの概念について

K-triviality

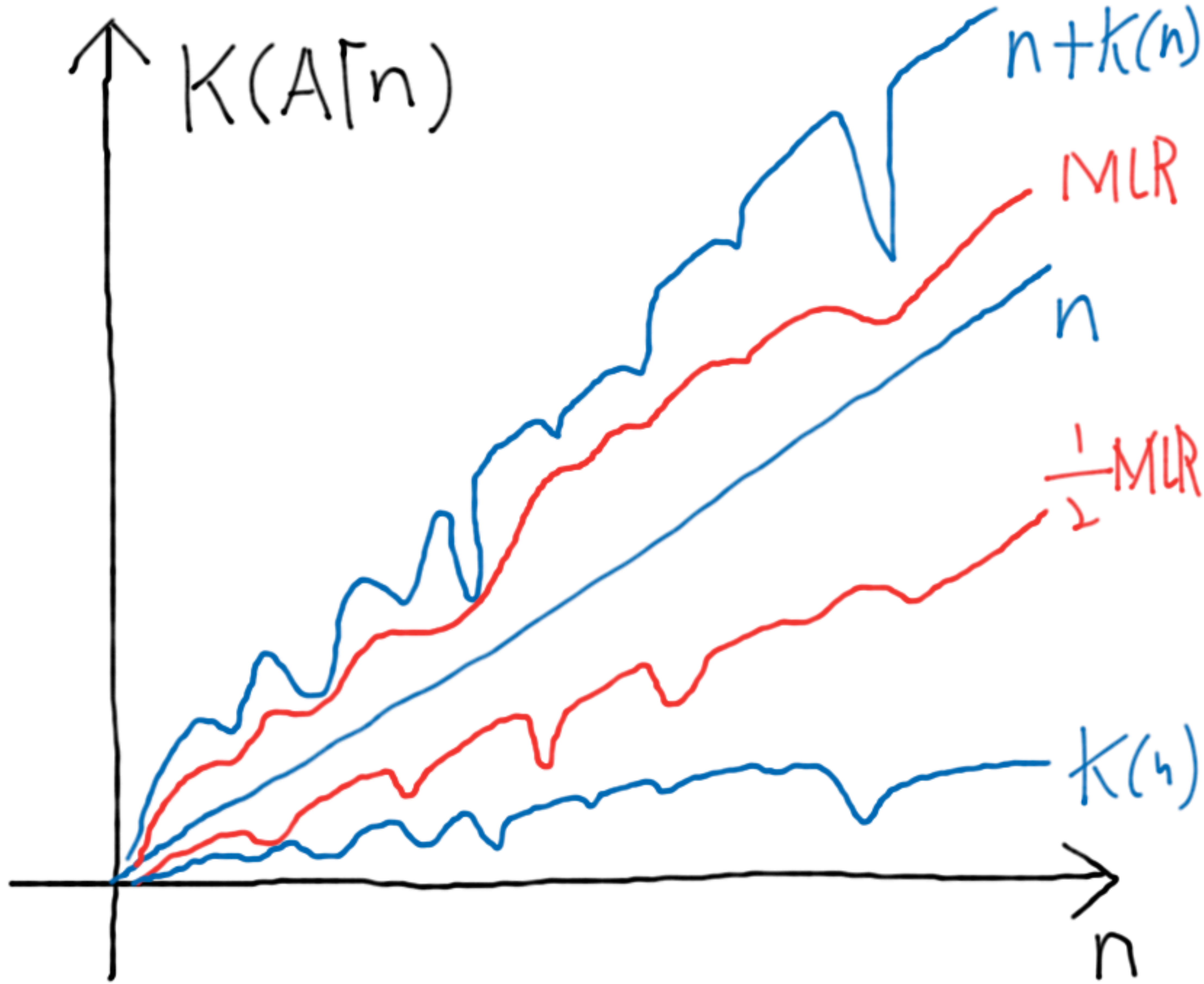
定義 (Chaitin 1976)

列 A が K-trivial とは以下を満たす事を言う.

$$K(A \upharpoonright n) < K(n) + O(1).$$

定理 (Solovay 1975)

計算不可能な K-trivial な列が存在する. .


K(A↾n)
n+K(n)
MLR
n
1/2 MLR
K(n)
n

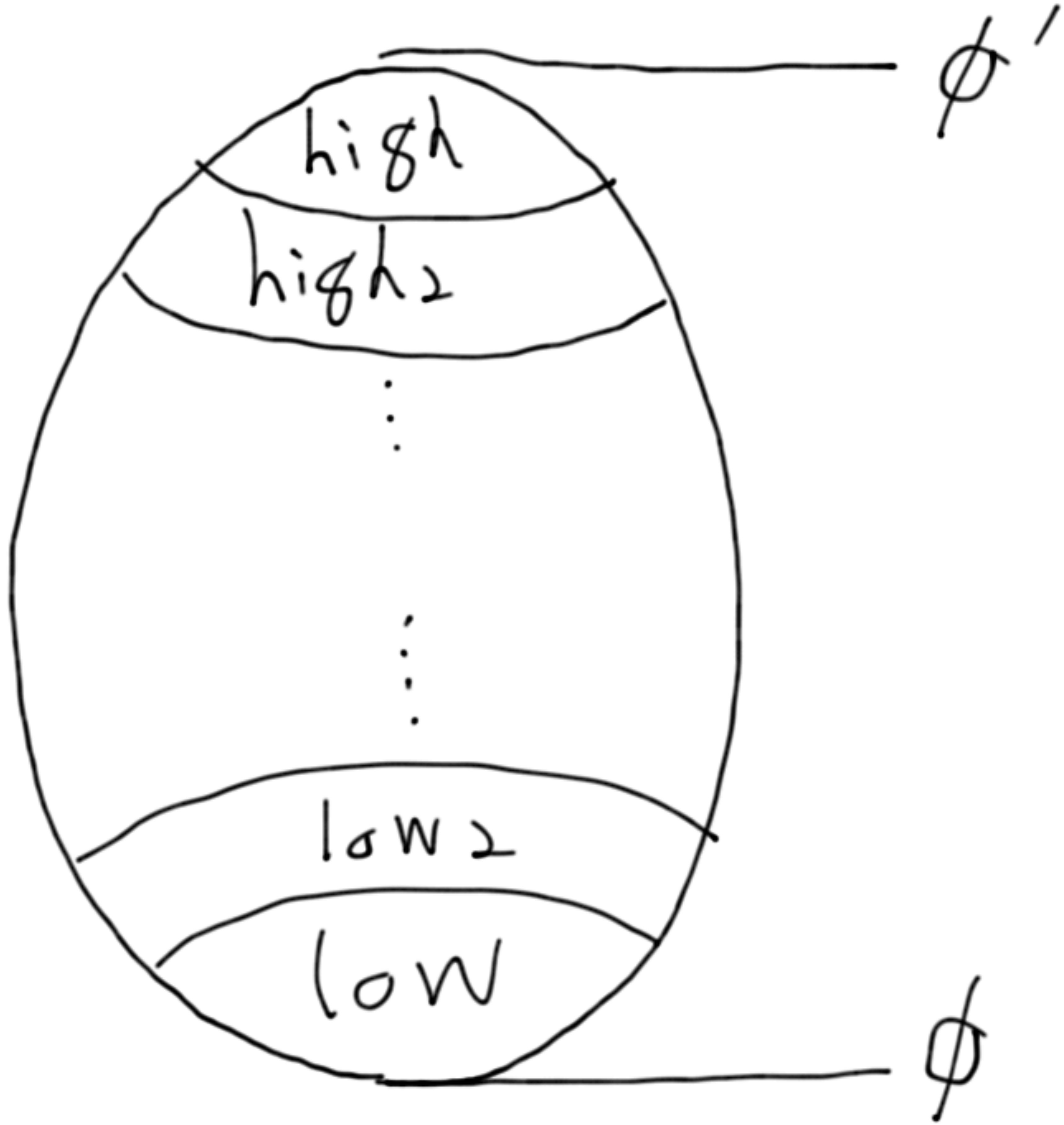
Low

定義

列 A が

$$A' \equiv_{\mathrm{T}} \emptyset'$$

を満たす時，low であると言う．   .



high
high2
low2
low
φ'
φ

Low for ML-randomness

定義 (Zambella 1990)

すべての ML ランダムな列が A-ML ランダムである時，列 A は low for ML ランダムネスであると言う.

定理 (Kučera&Terwijn 1999)

計算不可能な c.e. 集合で low for ML ランダムであるものが存在する.

A basis for ML-randomness

定義 (Kučera 1993)

列 A が a basis for ML ランダムネスであるとは，ある A-ML ランダムな列 Z があって $A \leq_{\mathrm{T}} Z$ となることを言う．

注意

A が ML ランダムで Z が A-ML ランダムなら，$A \oplus Z$ が ML ランダムだから，$A \leq_{\mathrm{T}} Z$ にはなり得ない．

Low for K

定義 (Andrej A. Muchnik in a seminar at Moscow State 1999)

列 A が low for K とは以下を満たす事を言う.

$$K(\sigma) < K^A(\sigma) + O(1).$$

観察

A が low for K なら, A は GL_1, つまり $A' \leq_{\mathrm{T}} A \oplus \emptyset'$.

計算可能性とランダムネス

basis for MLR	計算可能性
low for MLR	計算可能性
low for K	計算可能性
K-trivial	ランダムさ

Lowの概念

観察

low for K $\Rightarrow$ low for MLR $\Rightarrow$ basis for MLR

low for K $\Rightarrow$ K-trivial

定理 (Hirschfeldt, Nies and Stephan 2007)

basis for MLR $\Rightarrow$ low for K

定理 (Nies 2005)

K-trivial $\Rightarrow$ low for K .

low for K => low for MLR

A は low for K であるとすると,

$$K(\sigma) \leq K^A(\sigma) + O(1).$$

ML ランダムな列 X に対し，Levin-Schnorr の定理から

$$K(X \upharpoonright n) > n - O(1).$$

よって,

$$K^A(X \upharpoonright n) > n - O(1).$$

再び Levin-Schnorr の定理から，X は A-ML ランダム．　　.

low for MLR => basis for MLR

A は low for MLR であるとする．Kučera-Gács の定理から，ML ランダムな列 B があって,

$$A \leq_{\mathrm{T}} B.$$

A は low for MLR だから，B は A-ML ランダム

low for K => K-trivial

A は low for K であるとすると,

$$K(A \restriction n) \leq K^A(A \restriction n) + O(1) \leq K^A(n) + O(1) \leq K(n) + O(1).$$

よって A は K-trivial

Schnorrランダムネス

Schnorrランダムネス

定義 (Schnorr 1971)

Schnorr テストとは ML テスト $\{U_n\}$ で $\mu(U_n)$ が一様に計算可能なものを言う．ある列 A が Schnorr ランダムであるとは，すべての Schnorr テストに対し $A \notin \bigcap_n U_n$ である時に言う．

マルチンゲール

order とは自然数から自然数への関数で単調非減少かつ無限大に発散するものを言う.

定理 (Schnorr 1971)

ある列 $A \in$ が Schnorr ランダムであることと，すべての計算可能なマルチンゲール d と計算可能な order h に対して,

$$d(A \upharpoonright n) < h(n) + O(1)$$

であることは同値.

computable measure machines

定義 (Downey and Griffiths 2004)

prefix-free マシン M に対し，$\mu([\![\mathrm{dom}(M)]\!])$ が計算可能である時，M は computable measure machine であると言う．

定理 (Downey and Griffiths 2004)

列 A が Schnorr ランダムであることと以下は同値．すべての computable measure machine M に対して，

$$K_M(A \upharpoonright n) > n - O(1).$$