Lusinの定理の実効化について

夏のLA 2012

2012年7月17日　天橋立 宮津ロイヤルホテル

宮部賢志

京都大学　数理解析研究所

ランダムな点で
定義される関数

コイン投げゲーム（挑戦者）

- 公平なコインを投げて表が出たらある商品がもらえる
- １回挑戦するのに１万円かかる
- １日につき挑戦できるのは１回まで
- ところが投げても投げても裏ばかり・・・

コイン投げゲーム（主催者）

- 「真にランダム」なコイン
- 毎日６４億人（＝2^32.5）の挑戦がある
- 2^20人以上が10回投げても表が出ない
- 1000人に1人からクレームがくるとすると，
  2^10人からクレームが来ることになる

解決策

- 10回投げても表が出なければ,
  10回目で表が出たことにする
- ほとんどの人にとって真にランダムで,
  一定回数でゲームが打ち切られている

問題設定

Cantor 空間 2^ω, 一様測度 μ

部分関数 $f :\subseteq 2^\omega \to \mathbb{R}$

1. f は何らかの意味で計算可能
2. 何らかの意味でランダムな点で定義されている

任意の $\epsilon > 0$ に対して，次を満たす全域な計算可能関数 g と co-c.e. 閉集合 K は存在するか？

1. $\mu(2^\omega \setminus K) < \epsilon$
2. $A \in K$ に対して $f(A) = g(A)$

Lusinの定理

定理 (Lusin の定理)

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ に対して,

f が可測 $\iff$

任意の $\epsilon > 0$ に対して,

連続関数 g とコンパクト集合 K が存在して,

$\mu([0,1] \backslash K) < \epsilon$ かつ $x \in K$ に対して $f(x) = g(x)$.

Layerwise計算可能性

Cantor空間

$S \subseteq 2^*$ が c.e. であるとは，ある計算可能な関数 $f :\subseteq 2^* \to 2^*$ が存在して，$S = \mathrm{dom}(f)$ となることを言う

$\sigma \in 2^*$ に対し，$[\sigma] = \{A \in 2^\omega \ : \ \sigma \prec A\}$ とする

開集合 $U \subseteq 2^\omega$ が c.e. であるとは，$U = \bigcup_{\sigma \in S} [\sigma]$ となる c.e. 集合 S が存在することを言う

閉集合 $K \subseteq 2^\omega$ が co-c.e. であるとは，ある c.e. 開集合 U が存在して $K = 2^\omega \backslash U$ となることを言う

Martin-Löfランダムネス

定義 (Martin-Löf 1966)

ML テストとは，一様 c.e. 開集合の列 $\{U_n\}$ で，$\mu(U_n) \leq 2^{-n}$ であるもの

$A \in 2^\omega$ が ML ランダムとは，すべての ML テスト $\{U_n\}$ に対し，$A \notin \bigcap_n U_n$ となること

命題

万能 ML テスト $\{U_n\}$ が存在する，すなわち，すべての ML テスト $\{V_n\}$ に対し，ある $c \in \mathbb{N}$ があって，すべての n で $V_{n+c} \subseteq U_n$

Schnorrランダムネス

定義 (Schnorr 1971)

Schnorr テストとは，一様 c.e. 開集合の列 $\{U_n\}$ で，$\mu(U_n) \leq 2^{-n}$ かつ $\mu(U_n)$ が一様計算可能であるもの

$A \in 2^\omega$ が Schnorr ランダムとは，すべての ML テスト $\{U_n\}$ に対し，$A \notin \bigcap_n U_n$ となること

命題

万能 Schnorr テストは存在しない

Layerwise計算可能性

定義 (Hoyrup, Rojas 2009)

$f :\subseteq 2^\omega \to \mathbb{R}$ が layerwise 計算可能とは，万能 ML テスト $\{U_n\}$ に対し，f が $2^\omega \backslash U_n$ 上一様計算可能であることを言う

定義 (宮部)

$f :\subseteq 2^\omega \to \mathbb{R}$ が Schnorr layerwise 計算可能とは, ある Schnorr テスト $\{U_n\}$ に対し，f が $2^\omega \backslash U_n$ 上一様計算可能であることを言う

Schnorr layerwise計算可能性

定義 (Pour-El-Richard 1989, Pathak-Rojas-Simpson 20xx, 宮部)

$f :\subseteq [0,1] \to \mathbb{R}$ が実効的 L^1 計算可能であるとは，有理数係数多項式列 $\{f_n\}$ が存在して，

$$f(x) = \lim_n f_n(x) \text{ かつ } \|f - f_n\|_1 \le 2^{-n}$$

定理 (宮部)

実効的 L^1 計算可能

$\approx$ Schnorr layerwise 計算可能 $+$ 計算可能な L^1 ノルム

全域計算可能関数による近似

計算可能関数による近似

定義 (宮部)

$f :\subseteq 2^\omega \to \mathbb{R}$ が全域計算可能関数により一様に近似可能であるとは,

- $\{g_n\}$ は全域な一様計算可能関数列
- $\{K_n\}$ は一様 co-c.e. 閉集合列
- $\mu(2^\omega \backslash K_n) \leq 2^{-n}$
- $\mu(2^\omega \backslash K_n)$ は一様計算可能
- $A \in K_n$ に対して $f(A) = g(A)$

特徴付け

定理 (宮部)

f が全域計算可能関数により一様に近似可能

$\Longleftrightarrow$ Schnorr layerwise 計算可能

定理 (宮部)

「全域計算可能関数により一様に近似可能」の定義から測度の一様計算可能性を落とすと，layerwise 計算可能を特徴付ける

補題とその問題

補題

任意の c.e. 開集合 U と $2^\omega \backslash U$ で計算可能な任意の関数 f に対して，全域計算可能な関数 g が計算可能に取れて，$A \in 2^\omega \backslash U$ で $f(A) = g(A)$ となる

問題

2^ω を $[0,1]$ などの一般の計算可能距離空間に置き換えれるか？

L^1 計算可能 $\Rightarrow$ 近似可能 $\Rightarrow$ Schnorr layerwise 計算可能