Lusin の定理の実効化について

宮部賢志*

1 ランダムな点で定義される関数

次のような状況を考えよう．多くの人が別々に，公平なコインを繰り返し投げ，何回目に初めて表が出るかを記録する．「ランダムな列が出る」と信じることができたとしても，実験を行う人が非常に多い場合，中には時間がかかりすぎる人が出てきてしまう．そこで現実的には何回か投げてずっと表が出なければ，表が出たことにして打ち切るのが自然であろう．そうすることで，「ほとんど確実に正しい値を返し，ある一定時間に値を返す計算可能な関数」が得られる．どんなランダムな関数ならば，そのような関数は存在するだろうか？

設定を数式で表現しよう．μ を Cantor 空間 2^ω 上の一様測度とする．部分関数 $f :\subseteq 2^\omega \to \mathbb{R}$ を考える．後にこの関数 f に対して，

1. 何らかの意味で計算可能，
2. 何らかの意味でランダムな点では定義されている，

ことを要請する．この時，任意の $\epsilon > 0$ に対して，次のような関数 g は存在するかを問う．

1. $g : 2^\omega \to \mathbb{R}$ は全域な計算可能関数．
2. K は co-c.e. 閉集合．
3. $\mu(2^\omega \setminus K) < \epsilon$.
4. $A \in K$ に対して $f(A) = g(A)$.

計算可能性を無視すれば以下の定理が知られている．この問題は以下の定理の実効化と言えよう．

定理 1.1 (Lusin の定理; [1, Theorem 2.2.10])**.** $[0, 1]$ と *Lebesgue* 測度上の関数 f が可測であることの必要十分条件は，任意の $\epsilon > 0$ に対し，連続関数 g とコンパクト集合 K が存在して，$\mu([0, 1]\setminus K) < \epsilon$ かつ $x \in K$ に対して $f(x) = g(x)$ となること．

2 layerwise 計算可能性と L^1 計算可能性

「ランダムな点で定義される関数」として，最近 2 つの重要な概念が提案された．layerwise 計算可能性と L^1 計算可能性である．

まずランダムの概念を定義しよう．最も有名なランダムの概念は Martin-Löf ランダムネスであろう．ランダムの概念の定義には，統計における検定の概念を利用する．ランダムな点であれば，測度が小さくなる集合列すべてには入らないと信じられるだろう．この直感的説明を以下のように定式化する．

文字列の集合 S が c.e. であるとは，計算可能に枚挙可能であることを言う．文字列 $\sigma \in 2^*$ に対し，$[\sigma] = \{A \in 2^\omega \mid \sigma \prec A\}$ とする．開集合 $U \subseteq 2^\omega$ が c.e. とは，$U = \bigcup_{\sigma \in S}[\sigma]$ となる c.e. 集合 S が存在することを言う．

定義 2.1 (Martin-Löf [3])**.** *Martin-Löf テスト*とは，一様に *c.e.* である開集合の列 $\{U_n\}$ で，$\mu(U_n) \le 2^{-n}$ であるものを言う．列 $A \in 2^\omega$ が *Martin-Löf ランダム*とは，すべての *Martin-Löf* テスト $\{U_n\}$ に対し，$A \notin \bigcap_n U_n$ となることを言う．

すべての Martin-Löf テスト $\{V_n\}$ に対し，ある $c \in \mathbb{N}$ があって，すべての n で

$$V_{n+c} \subseteq U_n$$

*京都大学数理解析研究所

を満たすような万能 Martin-Löf テスト $\{U_n\}$ が存在することが知られている．

この概念を使ってランダムな点で計算可能であるということを次のように定義しよう．

定義 2.2 (Hoyrup, Rojas [2])．関数 $f :\subseteq 2^\omega \to \mathbb{R}$ が *layerwise* 計算可能 であるとは，万能 *Martin-Löf* テスト $\{U_n\}$ に対し，f が $2^\omega \setminus U_n$ 上一様に計算可能であることを言う．

ここで f はすべての Martin-Löf ランダムな列で定義されていることに注意しよう．また，各 Martin-Löf ランダムの列 A に対して，$f(A)$ は A から計算可能である．この概念はいくつかの結果を示すのに有用であった．

一方で L^1 計算可能性という概念がある．

定義 2.3 (essentially Pour-El and Richard [5], Pathak, Rojas and Simpson [4])．関数 $f :\subseteq [0,1] \to \mathbb{R}$ が 実効的 L^1 計算可能 であるとは，有理数係数の多項式の列 $\{f_n\}$ が存在して，

$$f(x) = \lim_n f_n(x) \text{ かつ } ||f - f_n||_1 \leq 2^{-n}$$

となることを言う．

Pathak らはこの関数がすべての Schnorr ランダムな点で定義されることを示した．

定義 2.4 (Schnorr [7])．*Schnorr* テスト とは，*Martin-Löf* テスト $\{U_n\}$ で $\mu(U_n)$ が一様に計算可能であるものを言う．列 $A \in 2^\omega$ が *Schnorr* ランダム とは，すべての *Schnorr* テスト $\{U_n\}$ に対し，$A \notin \bigcap_n U_n$ となることを言う．

命題 2.5 (Pathak, Rojas and Simpson [4])．実効的 L^1 計算可能関数 f はすべての *Schnorr* ランダムな列で定義される．

さらにすべての Schnorr ランダムな列 A で $f(A)$ が計算可能であることが，研究者の間で知られていた．layerwise 計算可能性と実効的 L^1 計算可能性はどちらも「ランダムな列で定義される関数」である．次の節ではこれらの関係について明らかにする．

3 Schnorr layerwise 計算可能性と弱 L^1 計算可能性

まず layerwise 計算可能性の Schnorr ランダムネス版を定義する．

定義 3.1 (宮部)．関数 $f :\subseteq 2^\omega \to \mathbb{R}$ が *Schnorr layerwise* 計算可能 であるとは，ある *Schnorr* テスト $\{U_n\}$ が存在して，f が $2^\omega \setminus U_n$ 上一様に計算可能であることを言う．

この概念と実効的 L^1 計算可能性は次のような関係がある．実効的 L^1 計算可能関数の定義域は $[0,1]$ であるが，測度論的に 2^ω と同一視する．

定理 3.2 (宮部)．すべての実効的 L^1 計算可能関数に対して，ある *Schnorr layerwise* 計算可能関数が存在して，*Schnorr* ランダムな列で一致する．逆にすべての *Schnorr layerwise* 計算可能な関数で計算可能な L^1 ノルムを持つものに対して，ある実効的 L^1 計算可能関数が存在して，*Schnorr* ランダムな列で一致する．

すなわち「実効的 L^1 計算可能性」と「Schnorr layerwise 計算可能かつ L^1 ノルムが計算可能であること」は本質的に同じことである．

次に実効的 L^1 計算可能性の Martin-Löf ランダムネス版を定義しよう．

定義 3.3 (宮部)．関数 $f :\subseteq [0,1] \to \mathbb{R}$ が 弱 L^1 計算可能 であるとは，有理数係数の多項式の列 $\{f_n\}$ が存在して，

$$f(x) = \lim_n f_n(x) \text{ かつ } \sum_n ||f - f_n||_1 < \infty$$

となることを言う．

弱 L^1 計算可能関数は L^1 空間の弱計算可能な点である．また弱 L^1 計算可能関数はすべての Martin-Löf ランダムな点で定義される．しかし，弱 L^1 計算可能性と layerwise 計算可能性は一致しない．

4　全域計算可能関数による近似

元の問題に戻ろう．全域計算可能関数による近似が可能な関数族とはどういうものであろうか．以下では 2^ω 上での特徴付けを与える．

定義 4.1. 関数 $f :\subseteq 2^\omega \to \mathbb{R}$ が全域計算可能関数により一様に近似可能とは，全域な一様計算可能関数列 $\{g_m\}$ と一様 *co-c.e.* 閉集合 K_m が存在して，$\mu(2^\omega \backslash K_m) \leq 2^{-m}$ かつ $\mu(2^\omega \backslash K_m)$ が一様に計算可能で，$A \in K_m$ に対して $f(A) = g(A)$．

定理 4.2. 関数 $f :\subseteq 2^\omega \to \mathbb{R}$ が全域計算可能関数により一様に近似可能であることの必要十分条件は，*Schnorr layerwise* 計算可能であることである．

以下の含意に注意しよう．

実効的 L^1 計算可能性
$\Rightarrow$Schnorr layerwise 計算可能性
$\Rightarrow$layerwise 計算可能性

この定理は以下の補題から従う．

補題 4.3. 任意の *c.e.* 開集合 U と $2^\omega \backslash U$ で計算可能な任意の関数 f に対し，全域計算可能な関数 g が計算可能に取れて，$A \in 2^\omega \backslash U$ で $f(A) = g(A)$ となる．

Proof sketch. 下側半計算可能関数 $\underline{f} : 2^\omega \to \mathbb{R}$ と上側半計算可能関数 $\overline{f} : 2^\omega \to \mathbb{R}$ が存在して，

$$\text{すべての } A \text{ で} \underline{f}(A) \leq \overline{f}(A)$$

かつ

$$A \in 2^\omega \backslash U \Rightarrow \underline{f}(A) = \overline{f}(A)$$

となる．$\underline{f}[s](A)$ と $\overline{f}[s](A)$ を $\underline{f}(A)$ と $\overline{f}(A)$ の近似列とし，

$$U = \bigcup_{\sigma \in S} [\sigma]$$

を満たす prefix-free の c.e. 集合 S を考える．全域計算可能関数 g を次のように定義する．ステージ s で σ が S に入ったとすれば，$x \in [\sigma]$ で

$$\underline{f}[s](A) \leq g(A) \leq \overline{f}[s](A)$$

を満たすようにする．$A \in 2^\omega \backslash U$ では $f(A) = g(A)$ とする．□

一方，測度 $\mu(2^\omega \backslash K_m)$ の一様計算可能性を落とした条件は，layerwise 計算可能性を特徴付ける．

定理 4.4. 関数 $f :\subseteq 2^\omega \to \mathbb{R}$ が *layerwise* 計算可能であることの必要十分条件は，全域な一様計算可能関数列 $\{g_m\}$ と一様 *co-c.e.* 閉集合 K_m が存在して，$\mu(2^\omega \backslash K_m) \leq 2^{-m}$ かつ $A \in K_m$ に対して $f(A) = g(A)$．

これらの証明は 2^ω の性質に強く依存しており，定義域を $[0,1]$（などの一般の計算可能距離空間）に変えた場合に成り立つかどうかは自明ではない．全域計算可能関数ににより一様に近似可能という概念（可測関数の実効化の概念）は，一般には Schnorr layerwise 計算可能性と実効的 L^1 計算可能性の間にある概念のように筆者には思われる．

一方で弱 L^1 計算可能関数に変えた場合には成り立たない．

観察 4.5. 任意の全域計算可能関数 g に対して，

$$\mu(\{A \mid f(A) = g(A)\}) = 0$$

となる弱 L^1 計算可能関数 f が存在する．

Proof. 関数 f をすべての $A \in 2^\omega$ に対し，

$$f(A) = \Omega$$

で定義する．ここで Ω は Chaitin の停止確率である．すると f は弱 L^1 計算可能関数である．g を全域計算可能関数とすると，

$$\{A \mid g(A) = \Omega\} \subseteq \{A \mid \Omega \leq_{\mathrm{T}} A\}.$$

ここで右側の測度は 0 である [6]．□

5　議論

ランダムネスと計算可能解析との関係を調べる時，Martin-Löf ランダムネスよりも Schnorr ランダムネスの方が自然なことが多い．特に実効的 L^1 計算可能関数は多くの自然な性質を持っており，重要な概念だと思われる．

参考文献

[1] V. Bogachev. *Measure theory*. Springer, 2007.

[2] M. Hoyrup and C. Rojas. An Application of Martin-Löf Randomness to Effective Probability Theory. In *CiE*, pages 260–269, 2009.

[3] P. Martin-Löf. The Definition of Random Sequences. *Information and Control*, 9(6):602–619, 1966.

[4] N. Pathak, C. Rojas, and S. G. Simpson. Schnorr randomness and the Lebesgue Differentiation Theorem. To appear in Proceedings of the American Mathematical Society.

[5] M. B. Pour-El and J. I. Richards. *Computability in analysis and physics*. Springer, 1989.

[6] G. Sacks. *Degrees of Unsolvavility*. PhD thesis, Princeton University, 1963.

[7] C. Schnorr. A unified approach to the definition of a random sequence. *Mathematical Systems Theory*, 5:246–258, 1971.