ランダムの概念が持つべき自然な性質

宮部賢志　(京都大学)*

1. ランダムの概念が自然であるとはどういうことか

ある2進無限列がランダムであるとはどういうことか．Martin-Löfランダムネスはこの問題に対する最初の提案であり，多くの自然な性質が示されている．同時に他にも多くのランダムの概念が提案・研究されてきた．中でもSchnorrランダムネスは有名である．これまでは，Martin-Löfランダムネスは自然な概念で，Schnorrランダムネスには多くの欠点があると考えられてきた．しかし最近になって，Schnorrランダムネスに対して多くの自然な性質が示されてきている．

果たして今でも，Martin-LöfランダムネスはSchnorrランダムネスよりも自然な概念であると言えるだろうか．ここでは，Martin-Löfランダムネスが持つ自然な性質とはどういうものか，またSchnorrランダムネスの欠点と考えられてきたことは何であったのか，などを証明された結果をできる限り時間軸順に見ながら，再検討する．

2. ランダムの概念を定義する

2.1. 大数の法則と重複対数の法則

平等なコインを繰り返し投げると表と裏の相対頻度の極限はどちらも$\frac{1}{2}$に近づくと信じられるだろう．これを確率論の言葉で書いたものを，Borelの強大数の法則(1909)と言う．その極限への収束速度を与えたのがKhinchinの重複対数の法則(1924)であり，平均0，分散1の独立同分布確率変数列$\{X_n\}$に対して，ほとんど確実に

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k}{\sqrt{2n\log\log n}}=1$$

が成り立つという主張である．ある2進無限列がランダムであるならば，その列は大数の法則や重複対数の法則を満たしていて欲しいと思うだろう．

von Mises (1919) [23]は確率の頻度説による定式化の試みの中で，collectiveと呼ばれるランダムな列を考えた．collectiveは「どんな部分列でもその相対頻度がある値に収束する列」と定義される．すなわち大数の法則をランダムな列の定義として使おうとしたのであった．von Misesの定義は数学的に厳密ではなかったが，後にChurchやWaldによって補われた．ところが，Ville (1939) [22]により重複対数の法則が成り立たないcollectiveが存在することが示された．

ランダムな列は大数の法則と重複対数の法則を満たして欲しい．collectiveは大数の法則は満たすが，重複対数の法則は満たさない．よってランダムの概念としては不十分である．

2.2. 統計的検定

ランダムの概念としてみたすべき性質は大数の法則だけでは不十分であった．「大数の法則と重複対数の法則」を定義として採用しても，やがて満たさない法則が見つかるかもしれない．ならばそのような法則をすべて満たす列を考えてはどうだろうか．

* 〒606-8502 京都府京都市左京区北白川追分町　京都大学　数理解析研究所
e-mail: kmiyabe@kurims.kyoto-u.ac.jp
web: http://kenshi.miyabe.name/wordpress/

統計学において仮説が自然かどうかを判定するのに仮説検定が使われる．ある仮説を置き，その仮定の下で非常に確率の小さな事象が起これば，その検定に不合格したと考え，その仮説を誤っていると判断する．その事象は通常平均からの差を考えるという意味で，大数の法則に基づいて検定していると考えられる．

そこですべての（ある意味で）計算可能な検定で棄却されない列としてランダムな列を定義したのがMartin-Löfランダムネスである．

定義 2.1 (Martin-Löf (1966) [13]). μを*Cantor*空間2^ω上の一様測度とする．一様に*c.e.*の開集合の列$\{U_n\}$がすべてのnで$\mu(U_n) \leq 2^{-n}$であるとき，$\{U_n\}$を*Martin-Löfテスト*であると言う．列$A \in 2^\omega$がすべての*Martin-Löf*テストについて$A \notin \bigcap_n U_n$であるとき，Aは*Martin-Löfランダム*であると言う．

集合Sが計算可能であるとは，関係$\sigma \in S$が決定可能であることを言い，Sが計算可能に枚挙可能(computably enumerable, c.e.)であるとは，$\sigma \in S$を満たすσを計算可能に数え上げることができることを言う．実数αに対して，$L(\alpha) = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < \alpha\}$と置く．$\alpha$が計算可能であるとは，$L(\alpha)$が計算可能であることを言い，$\alpha$がc.e.であるとは，$L(\alpha)$がc.e.であることを言う．開集合$U$がc.e.であるとは，$U = \bigcup_{\sigma \in S}[\sigma] = \bigcup_{\sigma \in S}\{A \in 2^\omega \mid \sigma \prec A\}$となるc.e.集合$S$が存在することを言う．Martin-Löfテスト$\{U_n\}$に対し，$\mu(U_n)$はc.e.ではあるが，一般には計算可能ではない．Schnorrは計算可能なテストに制限すべきであると主張し，次のような概念を提案した．

定義 2.2 (Schnorr (1971) [19]). *Schnorrテスト*とは，*Martin-Löf*テスト$\{U_n\}$で，$\mu(U_n)$が一様に計算可能であるものを言う．列$A \in 2^\omega$がすべての*Schnorr*テストについて$A \notin \bigcap_n U_n$であるとき，Aは*Schnorrランダム*であると言う．

Martin-Löfランダムな列もSchnorrランダムな列も，大数の法則および重複対数の法則を満たすことが知られている([24, 12])．

3. Martin-Löfランダムネスが持つ自然な性質

Schnorrによる上記のような議論があったにも関わらず，その後しばらくはMartin-Löfランダムネスに対して様々な良い性質が示されることになる．

3.1. 万能性

あるランダムネスに対するあるテストが万能であるとは，そのテストだけでそのランダムネスが特徴付けられることを言う．

定理 3.1 (Martin-Löf [13]). 万能*Martin-Löf*テストは存在する．

定理 3.2 (Schnorr [19]). 万能*Schnorr*テストは存在しない．

万能テストの存在は，ランダムの概念として自然であることを後押しするだけでなく，技術的にも証明が容易になるという利点があり，この違いはその後Martin-Löfランダムネスの研究が進む一因になったと思われる．しかし，その後様々なランダムネスが定義され，万能テストが存在するランダムネスは少数派である．万能テストの存在が自然なランダムの概念が持つべき性質かどうかは，疑問の余地がある．

3.2. マルチンゲール

Martin-LöfランダムネスとSchnorrランダムネスはテストの概念により定義される．このことはランダムな列が典型的であることを意味している．もしランダムネスの異な

る直感的説明を定式化したものが同値になれば，その概念が自然であるとより信じられるだろう．Villeはcollectiveへの批判的研究の中でマルチンゲールを導入し，ランダムネスの定義のために使うことを提案している．マルチンゲールはゲームにおける賭けの戦略を表し，予測不可能性を定式化することでランダムネスを特徴付ける．

定義 3.3 (Ville [22]; Levy [11])**.** 関数 $d : 2^{<\omega} \to \mathbb{R}^+$ が,

$$d(\sigma) = \frac{d(\sigma 0) + d(\sigma 1)}{2}$$

を満たす時，マルチンゲールと呼ぶ．

非有限非減少関数 $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ をorderと呼ぶ．$A \upharpoonright n$ は列 A の最初の n 桁を表す．

定理 3.4 (Schnorr (1971) [18, 19])**.** *列 $A \in 2^\omega$ が Martin-Löf ランダムであることと，すべての c.e. マルチンゲール d に対して，*

$$\limsup_n d(A \upharpoonright n) < \infty$$

となることは同値である．列 A が Schnorr ランダムであることと，すべての計算可能なマルチンゲール d と計算可能な order h に対して，

$$\limsup_n \frac{d(A \upharpoonright n)}{h(n)} < \infty$$

となることは同値である．

このようにMartin-LöfランダムネスとSchnorrランダムネスはどちらも予測不可能性による特徴付けを持つ．マルチンゲールがc.e.であるよりも計算可能である方が，自然な特徴付けであるようにも思えるが，orderが入るのが不自然だと思う人もあるだろう．ちなみにorderを落として，すべての計算可能なマルチンゲール d に対して，$\limsup_n d(A \upharpoonright n) < \infty$ となる列 A は計算可能ランダムと呼ばれる．

3.3. Kolmogorov複雑性

Martin-Löfランダムネスが自然な概念であるという共通認識を作った一番大きな原因は，やはりKolmogorov複雑性による特徴付けであろう．ある文字列の複雑さをその文字列を出力する最短のプログラムの長さとして定義する．するとランダムネスは圧縮不可能性として理解できる．

部分計算可能関数のことをマシンとも言う．あるマシン $f :\subseteq 2^{<\omega} \to 2^{<\omega}$ がprefix-freeであるとは，任意の異なる $\sigma, \tau \in \mathrm{dom}(f)$ に対し，$\sigma \not\prec \tau$ かつ $\tau \not\prec \sigma$ となることを言う．ある文字列のKolmogorov複雑性を

$$K(\sigma) = \min\{|\tau| \ : \ U(\tau) = \sigma\}$$

で定義する．ここで U は万能prefix-freeマシンである．

定理 3.5 (Levin (1973) [10], Schnorr (1973) [20], Chaitin (1975) [3])**.** *ある列 A が Martin-Löf ランダムであることと，*

$$K(A \upharpoonright n) > n - O(1)$$

であることは同値である．

Schnorrランダムネスの複雑性による特徴付けも存在するが，それが発見されるのは21世紀に入ってからである．

3.4. 独立性定理

ある2進無限列列がランダムであれば，奇数番目の列の情報が与えられたとしても，偶数番目の列はランダムに見えるだろう．このような直感を定式化したのが次の定理である．$A \oplus B$ で奇数番目が A，偶数番目が B の列を表す．

定理 3.6 (van Lambalgen (1987) [21])**.** 列 $A \oplus B$ が *Martin-Löf* ランダムであることと，A が *Martin-Löf* ランダムかつ B が A から見て *Martin-Löf* ランダムであることは同値．

ここで「A から見て」とは A を神託 (oracle) として用いてということである．この定理が成り立つことはランダムの概念が自然であることの1つの要件として良いだろう．Schnorr ランダムネスに対する独立性定理については，ごく最近になってようやくいくつかの結果が知られるようになった．

3.5. ここまでのまとめ

ここまでの結果をまとめると以下のようになる．下記の表の「?」はごく最近まで知られていなかったという意味である．

	Martin-Löf ランダムネス	Schnorr ランダムネス
万能テスト	存在する	存在しない
マルチンゲールによる特徴付け	存在する	存在する
複雑性による特徴付け	存在する	?
独立性定理	成立	?

その他にも，c.e. の実数に対しては，Martin-Löf ランダムであることと，Solovay 完全であることが同値であるなど，Martin-Löf ランダムネスの自然さを後押しする結果が早くから知られている．この表だけを見ると，Martin-Löf ランダムネスが自然な概念であるとの判断は妥当のように見える．

ただし，Martin-Löf ランダムな列の計算可能性はいくらでも大きくなる (Kucéra-Gács の定理) ため，より強いランダムネス (2 ランダムネス) の方が自然な概念であるという議論もある．

4. Schnorr ランダムネスが持つ自然な性質

Schnorr ランダムネスもまた自然な性質を持つことが，21 世紀に入ってから知られるようになってきた．

4.1. 計算可能な測度を持つマシンによる特徴付け

Martin-Löf ランダムネスに遅れること 30 年，Schnorr ランダムネスの複雑性による特徴付けが発見された．文字列の集合 $S \subseteq 2^{<\omega}$ に対し，

$$[\![S]\!] = \bigcup_{\sigma \in S} [\sigma] = \bigcup_{\sigma \in S} \{A \in 2^\omega \mid \sigma \prec A\}$$

で定義し，prefix-free マシン M の測度を

$$\mu([\![\mathrm{dom} M]\!])$$

で定義する．一般に prefix-free マシン M の測度は 1 以下の c.e. の実数となる．prefix-free マシン M が計算可能な測度を持つ時，計算可能な測度を持つマシン (computable measure machine) と呼ぶ．

定理 4.1 (Downey and Griffiths (2004) [5]). 列 A が *Schnorr* ランダムであることと，すべての計算可能な測度を持つマシン M に対して，

$$K_M(A \upharpoonright n) > n - O(1)$$

であることは同値.

またBienvenu and Merkle (2007) [1] によるdecidable prefix-freeマシンによる特徴付けも知られている.

4.2. tt-Schnorr ランダムネスと独立性定理

Schnorr ランダムに対する独立性定理は成り立たないことが分かったのも最近である [14, 25]. 筆者は独立性定理が成り立たないのは相対化が不適切であるからであることを指摘し，Schnorr ランダムネスに対しても本質的には独立性定理が成り立つことを示した.

ある概念 (例えばランダムネス) に対して，列 A から見た概念を考えることを，相対化 (relativization) という.「A から見た」とは,「A を神託として使って」という意味であるが，その使い方にはいろいろある. 最も良く使われるのがTuring還元 ($\leq_{\mathrm{T}}$) であるが，真理値表還元 (truth-table reducibility, $\leq_{\mathrm{tt}}$) もよく使われる. ではどの還元を使うべきか. これはランダムの概念に応じて独立性定理が成り立つように取るべきである.

あるランダムの概念 R(=ランダムな列の集合) が定義されているとしよう. 独立性定理が成り立つのであれば,

$$A \oplus B \in \mathrm{R} \iff A \in \mathrm{R} \text{ かつ } B \in \mathrm{R}(A)$$

であるから，ランダムな列 A に対しては，A から見てランダムな列の集合 $\mathrm{R}(A)$ は一意的に定まる. すなわち自然な相対化の仕方はランダムの概念に応じて定まっているのである.

「A から見て Schnorr ランダム」と言った場合には Turing 還元が使われる. 筆者 (2011) [15] は真理値表還元Schnorr ランダムネス (tt-Schnorr ランダムネス, truth-table Schnorr randomness, tt-Schnorr randomness) を定義した. 神託が無い場合にはSchnorr ランダムネスと tt-Schnorr ランダムネスは同値であるが，一般に A から見てSchnorr ランダムであることと，A から見て tt-Schnorr ランダムであることは異なる.

定理 4.2 (宮部 [15]). *tt-Schnorr* ランダムネスに対しては，独立性定理が成り立つ.

Martin-Löf ランダムネスの研究において，独立性定理は基本的で重要なツールとして頻繁に表れる. tt-Schnorr ランダムネスに対する独立性定理は，Schnorr ランダムネスの研究を進める上で非常に有用であると思われる.

注意 4.3. 論文 *[15]* では *tt-Schnorr* ランダムネスをテストにより定義し，複雑性およびマルチンゲールによる特徴付けを与えている. 実は，それより前に独立に *Franklin and Stephan (2010) [7]* が以下に述べるような全く異なる文脈で *tt-Schnorr* ランダムネスをマルチンゲールにより定義していた. このことも，この概念の自然さを表していると言える.

4.3. tt-Schnorrランダムネスとlowの概念

AがMartin-Löfランダムネスであることと，$K(A \upharpoonright n) > n - O(1)$であることは同値である．これに対し，$K(A \upharpoonright n) < K(n) + O(1)$で定義される概念をK-trivialと呼ぶ．一般に$K(n) \le \log n + 2\log\log n + O(1)$であるから，接頭辞の複雑さが非常に小さいことを意味する．このように「ランダムからはほど遠い」という概念が昔からいくつか研究されてきたが，それらがすべて同値であることが最近分かった．

定理 4.4 (Nies (2005) [16], Hirschfeldt-Nies-Stephan (2007) [8])**.** 以下は同値．

1. Aは*low for Martin-Löf randomness*
2. Aは*low for K*
3. Aは*K-trivial*
4. Aは*base for Martin-Löf randomness*

ではSchnorrランダムネスではどうだろうか．同じように定義すると，low for Schnorr randomnessとSchnorr trivialは異なることが分かった[6]．この文脈でFranklin and Stephanはtt-Schnorrランダムネスを定義し，以下を示した．

定理 4.5 (Franklin and Stephan (2010) [7])**.** 以下は同値．

1. Aは*low for tt-Schnorr randomness*
2. Aは*Schnorr trivial*
3. Aは*computably tt-traceable*

Franklin and Stephanはマルチンゲールによって定義したが，筆者はテストや複雑性による特徴付けも与えており，さらに以下の結果を得た．

定理 4.6 (宮部 (2011) [15], 宮部(未出版))**.** 以下は同値．

1. Aは*computably tt-traceable*
2. Aは*low for t.m.m.*
3. Aは*base for tt-Schnorr tests*

ここでlow for t.m.m.はlow for KのSchnorrランダムネス版である．この同値性は「Schnorrランダムからはほど遠い」という概念も自然な概念であることを意味する．Schnorr trivialの場合には，computably tt-traceableという概念とも一致する．K-trivialのtraceabilityによる特徴付けは多くの研究者が取り組んでいる未解決問題であり，いくつかの部分的な結果が知られている．

Schnorrランダムネスの研究がこれまで進んでこなかったのは，この正しい相対化の定義が与えられていなかった，もっと本質的にはTuring還元よりも真理値表還元との方が相性が良いことが認識されてこなかったことが大きな原因ではないかと思われる．

4.4. ランダムネスと微分可能性

解析学において「ほとんど至る所もしくはほとんど確実にある性質が成り立つ」という形の定理は多く見られる．その多くが適当に計算可能性を入れることで,「すべてのランダムな点である性質が成り立つ」という形に書き換えられると考えられている．大数の法則や重複対数の法則はその例である．Demuth は Martin-Löf ランダムに関してこの研究を強く推進したため，この方向の研究は「Demuth プログラム」と呼ばれている．計算可能解析学の発展に伴い，このプログラムを進める基盤ができてきたため，最近，盛んに研究されるようになった．

中でも微分可能性とランダムネスの関係は理解しやすい．まず，次の古典的な結果を思い出しておこう．

定理 4.7. 有界変動関数はほとんど至る所微分可能である．

この関数を計算可能なものに限ると，Martin-Löf ランダムネスを特徴付ける．

定理 4.8 (Demuth [4], Brattka-Miller-Nies [2])**.** 実数 r が *Martin-Löf* ランダムであることと，すべての有界変動計算可能関数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ が r で微分可能であることは同値.

Nies は様々なランダムネスに対応する関数族を研究することを提案し，計算可能ランダムネス，弱 2 ランダムネスが微分可能性により特徴付けられた．ところが Schnorr ランダムネスについては微分定理の形で述べるのが自然である．

定理 4.9 (Lebesgue [9])**.** 積分可能な関数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ に対し，ほとんど至る所,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\int_{B(r,\epsilon)} f d\mu}{2r}=f(r).$$

ここで $B(r,\epsilon)=(r-\epsilon,r+\epsilon)$.

上記の等式が成り立つ r を f の Lebesgue 点と呼ぶ.

定理 4.10 (Pathak, Rojas, Simpson [17])**.** 実数 r が *Schnorr* ランダムであることと，すべての実効的な L^1 計算可能関数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ の *Lebesgue* 点であることは同値.

では，Martin-Löf ランダムネスを微分定理の形で特徴付けられるだろうか．筆者は次のような結果を得ている.

定理 4.11 (宮部)**.** 実数 r が *Martin-Löf* ランダムであることと，すべての弱 L^1 計算可能関数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ で不定積分が計算可能となるものの *Lebesgue* 点であることは同値.

実数 r が計算可能であることは,

$$|r-q_n|<2^{-n}$$

となる計算可能な有理数列 $\{q_n\}$ が存在することと同値である．実数 r が弱計算可能であるとは,

$$\sum_n |r-q_n|<\infty$$

となる計算可能な有利数列 $\{q_n\}$ が存在することを言う．上記の実効的 L^1 計算可能関数は L^1 空間における計算可能な点に相当し，弱 L^1 計算可能関数は L^1 空間における弱計算可能な点に相当する.

上記の 2 定理の背景には，次の補題がある．次の古典的な結果も思い出しておこう.

命題 4.12. 関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ に対し，$\int |f| d\mu = 0$ とほとんど至る所 $f(x) = 0$ となることは同値．

補題 4.13 (Pathak, Rojas, Simpson [17])**.** $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ を実効的 L^1 計算可能関数とする．この時，$\int |f| d\mu = 0$ と，すべての *Schnorr* ランダムの点 x で $f(x) = 0$ となることは同値．

補題 4.14 (宮部)**.** $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ を弱 L^1 計算可能関数とする．この時，$\int |f| d\mu = 0$ と，すべての *Martin-Löf* ランダムの点 x で $f(x) = 0$ となることは同値．

筆者はこれらの結果の Kurtz ランダムネス版，弱 2 ランダムネス版も得ている．このことは Nies が研究することを提案した様々なランダムネスに対応する関数族を自然な形で表現している．

4.5. ここまでのまとめ

これまで得られた結果を以前の表に付け加えてみよう．

	Martin-Löf ランダムネス	Schnorr ランダムネス
万能テスト	存在する	存在しない
マルチンゲールによる特徴付け	存在する	存在する
複雑性による特徴付け	存在する	存在する
独立性定理	成立	成立
複数の low の概念	一致	一致
相性の良い関数族	弱 L^1 計算可能	L^1 計算可能

Martin-Löf ランダムネスと Schnorr ランダムネスは共に自然な概念であり，甲乙つけがたい．実は解析の定理をランダムネスの言葉で表現するときには，Schnorr ランダムネスの方が自然に書けることが多い．最後の行はその 1 例である．

これまでのランダムネスの研究の中で Schnorr ランダムネスではなく Martin-Löf ランダムネスが中心的に研究されてきた一因は，万能 Martin-Löf テストの存在であろう．果たして万能テストは自然なランダムの概念が持つべき性質なのだろうか．万能 Schnorr テストが存在しないことは何を意味するのかに関して，もっと計算可能解析との関連が調べられることによって明らかになると願っている．

5. まとめ

これまでランダムネスの研究の中では，Martin-Löf ランダムネスが中心に研究されてきた．しかし Schnorr ランダムネスも自然な概念であることが最近の研究によって明らかになってきた．状況によっては Schnorr ランダムネスの方が自然であることさえあり，今後，Schnorr ランダムネスに関しても多くの結果が出てくることが予想される．

ただし，ここで挙げた様々な性質は，筆者によって恣意的に挙げられたものであり，部分的に見れば Schnorr ランダムネスも十分自然であるということを言っているにすぎない．Martin-Löf ランダムネスに関しては多くの結果が知られており，Schnorr ランダムネス版を考えることが難しそうなものも多くある．

そもそも筆者はどちらが自然なランダムの概念かという議論をすべきだとは思っていない．ランダムの概念は計算可能性を導入しなければ厳密には定義できない．このことは，ランダムの概念が実在論的に存在するものではなく，人間から見てという相

対的なものであり，認識論的な概念であることを意味しているように思う．よって自然な概念が1つである必要はないし，使われるランダムの概念が自然である必要もないと思う．

その上で複数のランダムネスについて自然な性質が示されることで，計算可能性からどのようにランダムの概念が現れるかについての理解が深まる．研究すべきはMartin-Löfランダムネスでも Schnorr ランダムネスでもなく，ランダムの概念であると考えている．

参考文献

[1] L. Bienvenu and W. Merkle. Reconciling data compression and kolmogorov complexity. In L. Arge, C. Cachin, T. Jurdziński, and A. Tarlecki, editors, *Automata, Languages and Programming*, volume 4596 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 643–654, Berlin, 2007. Springer.

[2] V. Brattka, J. S. Miller, and A. Nies. Randomness and differentiability. Submitted.

[3] G. J. Chaitin. A theory of program size formally identical to information theory. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 22:329–340, 1975.

[4] O. Demuth. The differentiability of constructive functions of weakly bounded variation on pseudo numbers. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 16(3):583–599, 1975.

[5] R. Downey and E. Griffiths. Schnorr randomness. *Journal of Symbolic Logic*, 69(2):533–554, 2004.

[6] R. Downey, E. Griffiths, and G. LaForte. On Schnorr and computable randomness, martingales, and machines. *Mathematical Logic Quarterly*, 50(6):613–627, 2004.

[7] J. N. Y. Franklin and F. Stephan. Schnorr trivial sets and truth-table reducibility. *Journal of Symbolic Logic*, 75(2):501–521, 2010.

[8] D. Hirschfeldt, A. Nies, and F. Stephan. Using random sets as oracles. *Journal of the London Mathematical Society*, 75:610–622, 2007.

[9] H. Lebesgue. *Leçons sur l'Intégration et la recherche des fonctions primitives.* Gauthier-Villars, Paris, 1904.

[10] L. A. Levin. On the notion of a random sequence. *Soviet Mathematics Doklady*, 14:1413–1416, 1973.

[11] P. Lévy. *Théorie de l'Addition des Variables Aléatoires.* Gauthier-Villars, 1937.

[12] M. Li and P. Vitányi. *An introduction to Kolmogorov complexity and its applications.* Graduate Texts in Computer Science. Springer-Verlag, New York, third edition edition, 2009.

[13] P. Martin-Löf. The Definition of Random Sequences. *Information and Control*, 9(6):602–619, 1966.

[14] W. Merkle, J. Miller, A. Nies, J. Reimann, and F. Stephan. Kolmogorov-Loveland randomness and stochasticity. *Annals of Pure and Applied Logic*, 138(1-3):183–210, 2006.

[15] K. Miyabe. Truth-table Schnorr randomness and truth-table reducible randomness. *Mathematical Logic Quarterly*, 57(3):323–338, 2011.

[16] A. Nies. Lowness properties and randomness. *Advances in Mathematics*, 197:274–305, 2005.

[17] N. Pathak, C. Rojas, and S. G. Simpson. Schnorr randomness and the Lebesgue Differentiation Theorem. To appear in Proceedings of the American Mathematical Society.

[18] C. Schnorr. A unified approach to the definition of a random sequence. *Mathematical Systems Theory*, 5:246–258, 1971.

[19] C. P. Schnorr. *Zufälligkeit und Wahrscheinlichkeit*, volume 218 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[20] C. P. Schnorr. Process complexity and effective random tests. *Journal of Computer and System Sciences*, 7:376–388, 1973.

[21] M. van Lambalgen. *Random sequences*. PhD thesis, University of Amsterdam, 1987.

[22] J. Ville. Étude critique de la notion de collectif. *Gauthier-Villars*, 1939.

[23] R. von Mises. Grundlagen der Wahrscheinlichkeistrechnung. *Mathematische Zeitschrift*, 5:52–99, 1919.

[24] V. G. Vovk. The law of the iterated logarithm for random Kolmogorov, or chaotic, sequences. *Theory of Probability and Its Applications*, 32:413–425, 1987.

[25] L. Yu. When van Lambalgen's Theorem fails. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 135(3):861–864, March 2007.