Schnorr triviality and being a basis for tt-Schnorr randomness

宮部賢志*

ランダムネスの理論における大きな発見の1つは，以下の同値性であろう．

定理 1 ([5, 3])**.** $A \in 2^\omega$ に関し，以下は同値.

(i) A は *Martin-Löf* ランダムネスに関して *low.*
(ii) A は *prefix-free Kolmogorov* 複雑性 K に関して *low.*
(iii) A は K*-trivial.*
(iv) A は *Martin-Löf* ランダムネスの *basis.*

この定理の Schnorr ランダムネス版に関しては，紆余曲折を経て，以下の事実が得られていた．

定理 2 (Franklin and Stephan [2] and Miyabe [4])**.** A に関し，以下は同値.

(i) A は *computably tt-traceable.*
(ii) A は *tt-Schnorr* ランダムネスに関して *low.*
(iii) A は *tt* 還元可能な測度を持つマシンに関して *low.*
(iv) A は *Schnorr trivial.*

basis 型の特徴付けについては Franklin ら [2] により否定的な結果が与えられていた．

本講演では Schnorr triviality の新たな特徴付けをさらに2つ与える．1つ目の特徴付けは決定可能マシンによるものである．よく知られているように，Martin-Löf ランダムネスには prefix-free Kolmogorov 複雑性 K による特徴付けがあり，K-triviality はこの K を用いて定義される．Schnorr ランダムネスは計算可能な測度を持つマシンによる特徴付けがあり，Schnorr triviality はこのマシンを用いて定義される．一方，Schnorr ランダムネスは決定可能 prefix-free マシンによる特徴付け [1] が存在する．以下では，このマシンを用いて Schnorr triviality の特徴づけを行う．

定義 3. 任意の決定可能 *prefix-free* マシン M と計算可能な *order* g に対して，決定可能な *prefix-free* マシン N が存在して，

$$(\exists d)(\forall n) K_N(A \upharpoonright n) \leq K_M(B \upharpoonright n) + g(n) + d.$$

となる時，$A \leq_{\mathrm{wdm}} B$ と書く．

すぐに分かるように $\leq_{\mathrm{wdm}}$ は反射律と推移律を満たす．以下で見るようにこの還元は Schnorr ランダムネスと強い関係がある．

定理 4. A が *Schnorr* ランダムで $A \leq_{\mathrm{wdm}} B$ ならば，B も *Schnorr* ランダム．

* 京都大学数理解析研究所，kmiyabe@kurims.kyoto-u.ac.jp

定理 5. $A, B \in 2^\omega$ に関して，$A \le_{\mathrm{Sch}} B$ であることと $A \le_{\mathrm{wdm}} B$ であることは同値．特に A が *Schnorr trivial* であることと，$A \le_{\mathrm{wdm}} \emptyset$ であることは同値.

ここで多くの Schnorr triviality の特徴付けが，以下の様な形をしていることに気がつく.

> 任意の計算可能な何かに対し，別の計算可能な何かが存在して，そこから定義される集合に入っている.

そこで，この形で basis 型の特徴付けを与える.

定義 6. d を tt 還元可能マルチンゲールとする．X が d に関して A-tt 還元可能ランダムであるとは，

$$(\exists d)(\forall n) d^A(X \upharpoonright n) \le d$$

であることをいう．X が d に関して A-tt-*Schnorr* ランダムであるとは，すべての計算可能な *order* h に対して，

$$(\exists d)(\forall n) d^A(X \upharpoonright n) \le h(n) + d$$

であることをいう.

定義 7. A が tt 還元ランダムネスの *basis* であるとは，任意の tt 還元可能マルチンゲールに対して，A が d に関して A-tt 還元可能ランダムな列に tt 還元可能であることをいう．A が tt-*Schnorr* ランダムの *basis* であるとは，任意の tt 還元可能マルチンゲールに対して，A が d に関して A-tt-*Schnorr* ランダムな列に tt 還元可能であることをいう.

定理 8. A に関して以下は同値.

(i) A は *Schnorr trivial.*
(ii) A は tt 還元可能ランダムネスの *basis.*
(iii) A は tt-*Schnorr* ランダムネスの *basis.*

参考文献

[1] L. Bienvenu and W. Merkle. Reconciling data compression and kolmogorov complexity. In L. Arge, C. Cachin, T. Jurdziński, and A. Tarlecki, editors, *Automata, Languages and Programming*, volume 4596 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 643–654, Berlin, 2007. Springer.

[2] J. N. Y. Franklin and F. Stephan. Schnorr trivial sets and truth-table reducibility. *Journal of Symbolic Logic*, 75(2):501–521, 2010.

[3] D. Hirschfeldt, A. Nies, and F. Stephan. Using random sets as oracles. *Journal of the London Mathematical Society*, 75:610–622, 2007.

[4] K. Miyabe. Truth-table Schnorr randomness and truth-table reducible randomness. *Mathematical Logic Quarterly*, 57(3):323–338, 2011.

[5] A. Nies. Lowness properties and randomness. *Advances in Mathematics*, 197:274–305, 2005.