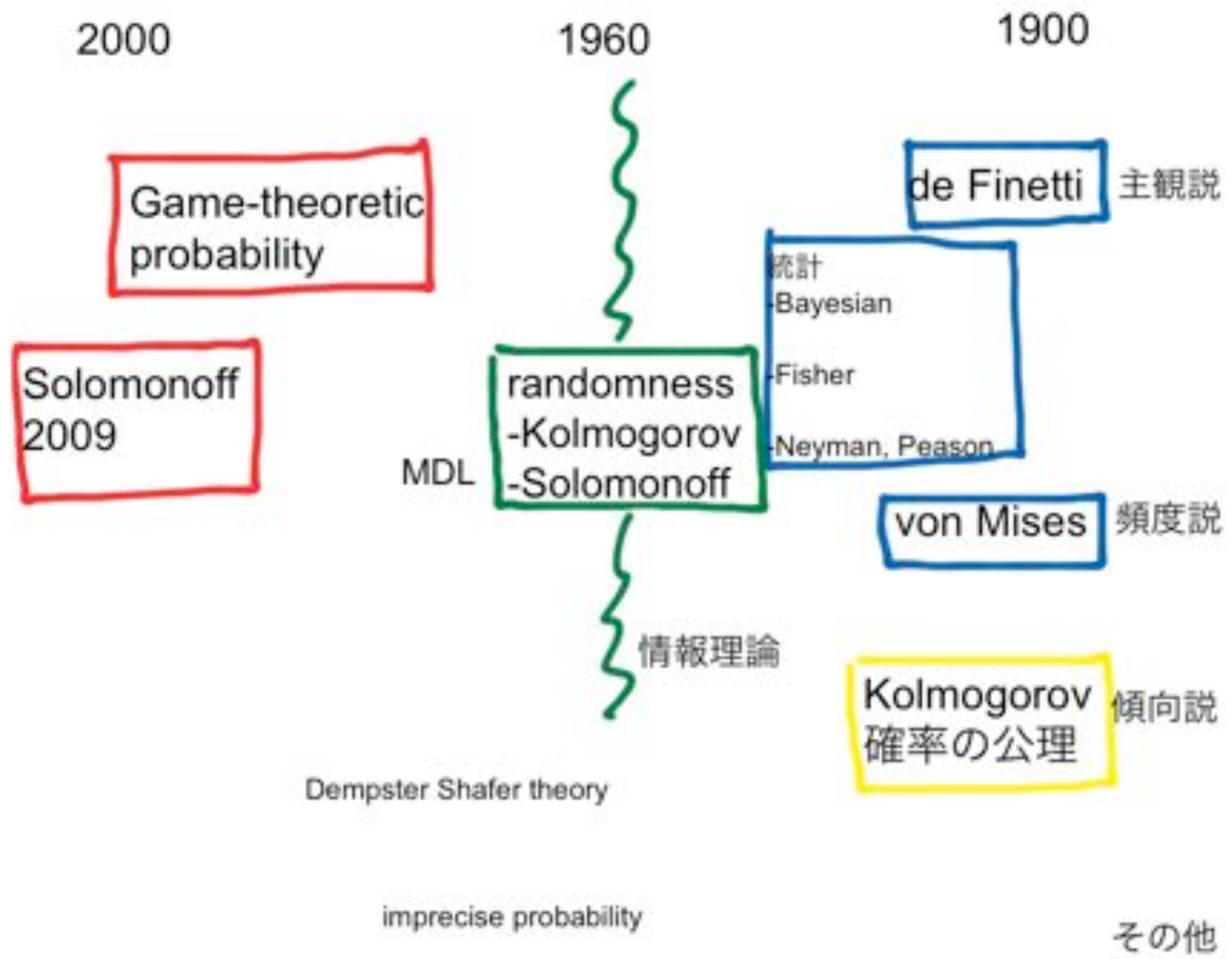


ゲーム論的確率論入門

第29回記号論理と情報科学研究集会
2012年9月15日～16日 京都産業大学

宮部賢志

京都大学 数理解析研究所



話の流れ

- ❖ ランダムネスの理論から見た
ゲーム論的確率論入門
- ❖ 歴史的な哲学的背景

ランダムから確率へ

2つのパラダイム

❖ 確率からランダムへ

- Hilbert, Kolmogorov
- 確率の公理からランダムな現象を記述

❖ ランダムから確率（予測）へ

- von Mises, Kolmogorov, Solomonoff

ランダムとは何か

- ❖ 典型的 → 統計
- ❖ 予測不可能性 → ゲーム論的確率論
- ❖ 圧縮不可能性 → algorithmic probability

予測不可能とは

~~~~~

2 進無限列が予測不可能とは、  
次のようなゲームで勝利できないことである。

- 最初に 1 円持っている。
- 次の値が 0 か 1 かにお金を賭ける。
- 当たったら 2 倍になる。
- はずれたら没収される。
- 所持金の  $\sup$  が無限大になれば勝利。

•

# 定式化

$$\mathcal{K}_0 := 1.$$

$n = 1, 2, \dots$  に対して, :

プレイヤーは  $s_n \in \mathbb{R}$  を宣言.

$x_n \in \{0, 1\}$  が提示される.

$$\mathcal{K}_n := \mathcal{K}_{n-1} + s_n \left( x_n - \frac{1}{2} \right).$$

プレイヤーは  $\mathcal{K}_n$  を非負に保つ必要がある.

$\lim_n \mathcal{K}_n = \infty$  の時, プレイヤーが勝利する.

このゲームにおいて, プレイヤーはほとんど確実に敗北する.



# プレイヤーが2人に

プレイヤー: Skeptic, Reality

プロトコル:  $\mathcal{K}_0 := 1$ .

$n = 1, 2, \dots$  に対して, :

Skeptic は  $s_n \in \mathbb{R}$  を宣言.

Reality は  $x_n \in \{0, 1\}$  を提示.

$$\mathcal{K}_n := \mathcal{K}_{n-1} + s_n(x_n - \frac{1}{2}).$$

Skeptic は  $\mathcal{K}_n$  を非負に保つ必要がある.

$\lim_n \mathcal{K}_n = \infty$  の時, Skeptic が勝利する.

このゲームにおいて, Skeptic はほとんど確実に敗北する.

# 示したいことは何か？

---

- ❖ 確率論の目的は何か？
- ❖ どんな振る舞いが  
「ほとんど確実に」起こるか？
- ❖ 例えば、大数の法則を証明できるか？



# 勝利条件の変更

~~~~~

付帯義務

Skeptic は $\mathcal{K}_n$ を非負に保つ必要がある.

Reality は $\sup_n \mathcal{K}_n < \infty$ を保つ必要がある.

勝利条件

$S_n/n \rightarrow 1/2$ となれば, Skeptic の勝利.

課題

Skeptic の勝利戦略を見つけよ！

.

言い換えると

Skeptic の勝利戦略がある

$\implies$ イベント E または $\lim_n K_n = \infty$ が起こる.

$\implies$ ほとんど確実に $\sup_n K_n < \infty$ が起こるから,

それと同じぐらい E が起こると信じることができる.

Reality に勝利戦略がある

$\implies \sup_n K_n < \infty$ かつ E でない $\{x_n\}$ を選べる.

$\implies$ 「ほとんど確実に E が起こる」とは信じることができない.

完全情報ゲームなので, ほとんどの場合 (quasi-Borel) にどちらかに勝利戦略がある.

大数の法則

定義

ある Skeptic の戦略 S のもとで、 E または $\lim_n K_n = \infty$ となるとき、 S は E を強制するという。

定理

上記のプロトコルにおいて、Skeptic は $S_n \rightarrow 1/2$ を強制できる。

定義

E がほとんど確実に起こるとは S が E を強制できることを言う。

哲学的長所 1

- ❖ ランダムな概念を直接定式化しており、
より確率の概念を正確に捉えている。
結果として大数の法則などが簡単に証明できる。

疑問 1

❖ 「所持金が有限」だけで十分なのか？

Villeの定理

定理

$$\mathbb{P}(E) = \inf \{ \mathbb{E} L_0 \mid \sup_{n \rightarrow \infty} L_n \geq \mathbb{I}_E \}.$$

定理

ある非負のマルチンゲールがあつて、 E が起こるとき無限大に発散するならば、 $\mathbb{P}(E) = 0$. 逆に $\mathbb{P}(E) = 0$ ならば、ある非負のマルチンゲールが存在して、 E が起こるとき無限大に発散する.

疑問 2

~~~~~

❖ 公理的な確率論との関係は？

# よく使われるプロトコル

UNBOUNDED FORECASTING PROTOCOL

プレイヤー: Forecaster, Skeptic, Reality

プロトコル:  $\mathcal{K}_0 := 1$ .

$n = 1, 2, \dots$  に対して, :

Forecaster が  $m_n \in \mathbb{R}$ ,  $v_n \geq 0$  を宣言.

Skeptic が  $M_n \in \mathbb{R}$ ,  $V_n \geq 0$  を宣言.

Reality が  $x_n \in \mathbb{R}$  を提示.

$$\mathcal{K}_n := \mathcal{K}_{n-1} + M_n(x_n - m_n) + V_n((x_n - m_n)^2 - v_n).$$

Skeptic は  $\mathcal{K}_n$  を非負に保つ必要がある.

Reality は  $\sup_n \mathcal{K}_n < \infty$  を保つ必要がある.



# 数学的長所

~~~~~

- ❖ 測度論的確率論で知られている定理が、
似た証明またはより簡単な証明で、
強い形で得られ、
その定理が測度論的確率論に変換できる。

疑問 3

~~~~~

- ❖ ゲーム論的確率論において,  
「確率」は定義できるの？



# 上確率と下確率

~~~~~

- ❖ 統一的なプロトコルは存在しなさそう。
→問題に応じて必要最低限の条件を仮定する.
- ❖ その上で, Skepticがどれだけの金額を儲けられるかにより, 上確率, 下確率, を定義する.
適当な設定では, $\text{上確率} = \text{下確率}$.

疑問 4

~~~~~

❖ Realityに勝利戦略があるとは？



# 順守

## 定義

Reality が戦略  $\mathcal{R}$  でイベント  $E$  を順守するとは,

- Forecaster と Skeptic の動き (付帯義務を守って) に関わらず  $E$  が起きて, かつ
- $\sup_n \mathcal{K} < \infty$  という付帯義務を守ると言う.

$\sup_n \mathcal{K} \leq 1$  を満たせるならば, 強く順守すると言う.

定理 (M. & Takemura)

Skeptic が  $E$  を強制できるとき, Reality は  $E$  を強く順守できる.

# 哲学的長所 2

確率分布を想定する必要がない。

- ❖ 確率分布を想定する必要がない。
- ❖ 各系列ごとの主張 v.s. 無限回の系列に対する主張



# 先駆者たち

---

# Pascal

~~~~~

- ❖ Blaise Pascal 1623-1662
- ❖ Fermatとの書簡が確率論の始まりと言われる



Pascal と Fermat

- ❖ Pascal
 - 賭けの公平性を基礎にした
 - ゲーム論的確率論の元
- ❖ Fermat
 - 組み合わせの方法を基礎にした
 - 測度論的確率論の元

Cournot's principle

- ❖ Antoine Cournot
1801-1877
- ❖ “A physically impossible event is one whose probability is infinitely small.”



Kolmogorov

- ❖ Andrei Kolmogorov
1903-1987
- ❖ “When $P(A)$ very small, we can be practically certain that the event A will not happen on a single trial of the conditions that define it.”



Ville

- ❖ Jean Ville 1910-1988
- ❖ “You will not multiply the capital you risk by a large factor.”

重要な功労者

- ❖ Vladimir Vovk
- ❖ Glenn Shafer
- ❖ Philip Dawid
- ❖ 竹内啓
- ❖ 竹村 彰通

研究集会のお知らせ

- ❖ Fourth Workshop on Game-Theoretic Probability and Related Topics
- ❖ 2012年11月12-14日
- ❖ 東京大学本郷キャンパス
- ❖ <http://kenshi.miyabe.name/gtp2012/>