

独立性定理と Radon-Nikodym微分

数学基礎論若手の会2012

2012年11月23日-25日 奈良県青少年会館

宮部賢志

京都大学 数理解析研究所

ランダムネスの理論の位置づけ

ランダムネスの理論の位置づけ

❖ 数学基礎論

- 集合論
- モデル理論
- 証明論
- 計算理論

数学基礎論とは？

~~~~~

- ❖ 数学で使われる概念について考察する
- ❖ 科学-仮説, 実験, 説明, 予測...  
数学-公理, 証明, 定義, 計算...
- ❖ 自然数, 図形, 関数, 集合, 計算...
- ❖ なぜ重要か? モデルになっているから



# 科学の概念の研究

---

- ❖ 科学哲学
- ❖ 科学の概念を数学的に研究できないか？
- ❖ 証明は推論のモデル？  
科学の営みそのもののモデル化

# 今日のテーマ

---

「互いにランダム」とはどういうことか？

「ある列から見てランダム」とはどういうことか？



# 話の流れ

---

- ❖ 独立性定理の証明
- ❖ 一般測度に対する独立性定理
- ❖ Radon-Nikodym微分

# 独立性定理

---

# Martin-Löf ランダムネス

~~~~~

積分可能な関数 $f : 2^\omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ は, ほとんど至る所有限.
なぜなら $\lambda(f = \infty) > 0$ なら, $\int f d\lambda = \infty$.

定理

$x \in 2^\omega$ が ML ランダム $\iff$

すべての積分可能な下側半計算可能関数 f に対して $f(x) < \infty$

独立性定理

~~~~~

定理 (van Lambalgen's Theorem 1987)

$\langle x, y \rangle \in 2^\omega \times 2^\omega$  が ML ランダム

$\iff x$  が ML ランダムかつ  $y$  が  $x$ -ML ランダム

## 証明

$y$  は  $x$ -ML ランダムでないとする.

ある積分可能な  $x$ -下側半計算可能関数  $f$  が存在して,

$f(y) = \infty$ .  $\int f d\lambda \leq 1$  としてよい.

ある下側半計算可能関数  $g : 2^\omega \times 2^\omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$  が存在して,

すべての  $t \in 2^\omega$  に対して,  $g(x, t) = f(t)$ .

ここで, すべての  $t \in 2^\omega$  に対して,  $\int g(t, -) d\lambda \leq 1$  となるように修正できる.

すると,  $\int g d\lambda \leq 1$  であり,  $g(x, y) = f(y) = \infty$ .



$\langle x, y \rangle$  は ML ランダムでなく,  $x$  は ML ランダムとする.  
積分可能な下側半計算可能関数  $t$  があって,  $t(x, y) = \infty$ .

$$f(t) = \int t(t, -) d\lambda$$

とすると,  $f$  は積分可能なので,  $f(x) < \infty$ .

$$g(t) = t(x, t)$$

とおくと,  $g$  は  $x$ -下側半計算可能であり,

$$\int g d\lambda = f(x) < \infty \text{ かつ } g(y) = t(x, y) = \infty$$

より,  $y$  は  $x$ -ML ランダムではない.



# 測度の一般化

~~~~~

定理 (folklore)

μ, ν を計算可能な測度とする.

$\langle x, y \rangle \in 2^\omega \times 2^\omega$ が $\mu \times \nu$ -ML ランダム

$\iff x$ が μ -ML ランダムかつ y が x - ν -ML ランダム

測度の更なる一般化

~~~~~

定理 (Day-Reimann)

$\mu, \nu$  を測度とする.

$\langle x, y \rangle \in 2^\omega \times 2^\omega$  が  $\mu \times \nu$ -ML ランダム

$\iff x$  が  $\nu$ - $\mu$ -ML ランダムかつ  $y$  が  $(x, \mu)$ - $\nu$ -ML ランダム

# 一般の測度への拡張

---



# 一般の測度の場合

問題 (by Bienvenu)

$\mu$  を計算可能な測度とする.

$(x, y)$  が  $\mu$ -ML ランダム

$\iff x$  が  $\mu_1$ -ランダムかつ  $y$  が  $x$ - $\mu_2^x$  ランダム

となるような  $\mu_2^x$  とは？

ただし,  $\mu_1$  は以下で定義する.

$$\mu_1(A) = \mu(A \times 2^\omega).$$

# 定義

~~~~~

定義

μ_2^x を以下によって定義する.

$$\mu_2^x(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu([x \upharpoonright n] \times A)}{\mu([x \upharpoonright n] \times 2^\omega)}.$$

定理 (folklore?; Bienvenu-Hoyrup-Shen)

μ を計算可能な測度とする. x が計算可能ランダムならば, μ_2^x は定義され, 測度になっている.

予想

~~~~~

予想

$\mu$  を計算可能な測度とする.

$(x, y)$  が  $\mu$ -ランダム

$\iff x$  が  $\mu_1$ -ランダムかつ  $y$  が  $x-\mu_2^x$  ランダム.



# 不成立

~~~~~

定理 (Ackermann-Freer-Roy)

以下を満たすような計算可能な測度で, Lebesgue 測度に対して絶対連続であるようなものが存在する. すなわち, すべての x に対して,

$$\mu_2^x \equiv_T x'.$$

成立条件

~~~~~

定理 (Bienvenu-Hoyrup-Shen)

$x \mapsto \mu_2^x$  が layerwise 計算可能であるとする.

この時,  $(x, y)$  が  $\mu$ -ML ランダム

$\iff x$  が  $\mu_1$ -ランダムかつ  $y$  が  $x-\mu_2^x$ -ML ランダム.



# 2-ランダム

~~~~~

定理 (Bienvenu-Hoyrup-Shen)

μ を計算可能な測度とする.

(x, y) が $\emptyset'$ - μ -ML ランダム

$\iff x$ が $\emptyset'$ - μ_1 -ランダムかつ y が $(\emptyset', x)$ - μ_2^x -ML ランダム.

Radon-Nikodym 微分

問題

~~~~~

- ❖ そのような測度はどんな測度？
- ❖ 条件付き確率に他ならないなら，  
Radon-Nikodym微分の計算可能性から  
何か言えるか？
- ❖ 微分定理の議論に似ている

# 古典的条件付き確率

~~~~~

A, B を事象とし, $P(B) > 0$ とすると, B における A の条件付き確率は,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

で定義される.

条件付き平均

$(\Sigma, \mathcal{F}, P)$ を確率三つ組, X は確率変数で $\mathbf{E}(X) < \infty$ とし,
 $\mathcal{G}$ は $\mathcal{F}$ の部分 σ -加法族とする. このとき, 次を満たす確率変数 Y が存在する.

1. Y は $\mathcal{G}$ 可測,
2. $\mathbf{E}(|Y|) < \infty$,
3. 任意の $G \in \mathcal{G}$ に対して, $\int_G Y dP = \int_G X dP$.

測度 0 を除いて一意だから, これを $\mathbf{E}(X|\mathcal{G})$ と書き, **条件付き平均** と呼ぶ.

Radon-Nikodym微分

定義

ν が μ に対して **絶対連続** であるとは、すべての可測集合 N に対して、 $\mu(N) = 0 \Rightarrow \nu(N) = 0$ であることを言う。

定理 (Radon-Nikodym)

ν, μ を有限測度とすると、以下は同値。

1. ある可測関数 f が存在して、 $\nu(A) = \int_A f d\mu$
2. $\nu \ll \mu$

この f を **Radon-Nikodym 微分** と呼び $\frac{d\nu}{d\mu}$ で表す。

L^1 計算可能性

定義

$$s = \sum_{k=1}^n q_k \mathbf{1}_{E_k}$$

の形の関数を**有理単関数** (rational step function) と呼ぶ. ここで $q_k \in \mathbb{Q}$ で, E_k は基本集合, 補基本集合の有限積.

関数 $f : \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, ある計算可能な有理単関数列 $\{s_n\}$ が存在して, すべての n で $\|f - s_n\|_1 \leq 2^{-n}$ となるとき, f は **L^1 計算可能** であると呼ぶ.

2つの実効的RN微分

~~~~~

定理 (Hoyrup-Rojas-Weihrauch 2011)

$\mu \ll \lambda$  を計算可能な有限測度とする.

この時, 一様に  $L^1(\lambda)$  計算可能関数の列  $\{h_n\}$  が存在して,  
Radon-Nikodym 微分  $\frac{d\mu}{d\lambda}$  に  $L^1(\lambda)$  で収束する.

更に  $\mu$  が  $\lambda$  に対して計算可能にノルム付け可能である場合には,  
 $\frac{d\mu}{d\lambda}$  は  $L^1(\lambda)$  計算可能.

# 条件付き確率再び

~~~~~

定理 (宮部)

λ を $2^\omega \times 2^\omega$ を一様測度とし, μ を λ に対して計算可能にノルム付け可能であるとする. この時, Schnorr ランダムな列 y に対して, μ_2^y は測度となり, 一様測度に対して以下の密度を持つ.

$$x \mapsto \frac{d\mu}{d\lambda}(x, y).$$

更に, μ_2^y は y から計算可能である.

一般測度の独立性定理

~~~~~

定理 (宮部)

$\mu$  を  $L^1$  計算可能関数を密度に持つ測度とする.

$(x, y)$  が  $\mu$ -ランダム

$\iff x$  が  $\mu_1$ -ランダムかつ  $y$  が  $x-\mu_2^x$  ランダム.

# これからの問題

~~~~~

- Schnorr ランダムネス版は成り立つか？
- μ が L^1 計算可能関数を密度に持つとき, $x \mapsto \mu_2^x$ は Schnorr layerwise 計算可能か？