計算可能解析学における測度の取り扱いについて

JAIST
2012年12月20日

宮部賢志

京都大学　数理解析研究所

明らかにしたいこと

- 「確率」や「予測」の概念が,
「計算」とどのように関わっているのか

話の流れ

- 計算可能な測度
- 計算可能分離公理とランダムネス

計算可能な測度

Cantor空間上の計算可能測度

- Cantor 空間 2^ω
- 開基 $[\sigma] = \{X \in 2^\omega \ : \ \sigma \preceq X\}$
- μ を 2^ω 上の確率測度

定義

μ が計算可能であるとは，$\mu([\sigma])$ が σ に関して一様に計算可能であることを言う.

開基で考えよう

$$\mu : \mathcal{B} \to [0,1]$$

と

$$\mu : 2^* \to [0,1]$$

を同一視することで，計算可能性を考える.

$\mu([\sigma])$ は $\mu(\sigma)$ と書くことが多い.

[0,1]上の計算可能測度(1/2)

- $[0, 1]$
- 開基 (p, q), $[0, q)$, $(p, 1]$, $[0, 1]$. ただし，$p, q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$
- μ を $[0, 1]$ 上の確率測度

定義

μ が atomic であるとは，$\mu(\{x\}) > 0$ となる $x \in [0, 1]$ が存在することを言う．atomic でない μ が計算可能であるとは，各開基 B の測度 $\mu(B)$ が一様に計算可能であることを言う．

[0,1]上の計算可能測度(2/2)

定義 (Weihrauch 1999)

$[0,1]$ 上の確率測度 μ が計算可能であるとは，各開基 B の測度 $\mu(B)$ が一様に下側半計算可能であることを言う.

定理

$x \in [0,1]$ が $[0,1]$ 上の計算可能な測度 μ の atom ならば，x は計算可能である.

計算可能距離空間

定義

計算可能距離空間とは，$\mathbf{X} = (X, d, \alpha)$ で以下を満たすものを言う.

1. (X, d) は距離空間
2. $\alpha : \mathbb{N} \to A$ が X の稠密な部分集合 A の表記 (notation)
3. $d : A \times A \to \mathbb{R}$ が (α, α, ρ)-計算可能

開基は $B(x, r) = \{y \ : \ d(x, y) < r\}$. ただし，$x \in A$, $r \in \mathbb{Q}$.

測度の空間

定理 (Gács 2005, Hoyrup&Rojas 2009)

以下で定義される (M, π, F) は計算可能距離空間となる.

1. (X, d, α) を計算可能距離空間とする.
2. M は X 上の確率測度の集合.
3. π は Prokhorov 距離.
4. B は A 上の有限個の点に有理数の測度があるような測度の集合.
5. F は B への自然な表記.

Prokhorov距離

$$\pi(\mu,\nu) = \inf\{\epsilon \in \mathbb{R}^+ \;:\; \mu(A) \leq \nu(A^\epsilon) + \epsilon \text{ for all Borel } A\}$$

ここで, $A^\epsilon = \{x \;:\; d(x,A) < \epsilon\}.$

計算可能な測度

定義 (Gács 2005, Hoyrup&Rojas 2009)

上記の空間の計算可能な点を計算可能な測度と呼ぶ.

定理 (Gács 2005, Hoyrup&Rojas 2009)

μ が計算可能 $\iff$ 開基の有限和の測度が一様に下側半計算可能

開基の変更

定理 (Bosserhoff 2008, Hoyrup&Rojas 2009)

(X, d, α) を計算可能距離空間，μ をその上の計算可能測度とする．この時，稠密で計算可能な実数列 $\{r_n\}$ が存在して，

$$\{B(x, r_n)\ :\ x \in A,\ n \in \omega\}$$

が開基となって，その測度が一様に計算可能となる．

計算可能位相空間

定義

計算可能位相空間とは, (X, τ, β, ν) で以下を満たすものを言う.

1. (X, τ) は T_0
2. $\nu :\subseteq \Sigma^* \to \beta$ は τ の baseβ の計算可能な定義域を持つ表記
3. 以下を満たす c.e. 集合 $S \subseteq (\mathrm{dom}(\nu))^3$ が存在する.

$$\nu(u) \cap \nu(v) = \bigcup \{\nu(w) \ : \ (u, v, w) \in S\}$$

for all $u, v \in \mathrm{dom}(\nu)$.

測度の空間

定理 (宮部)

以下で定義される $(M, \tau_A, \beta_A, \nu_A)$ は計算可能位相空間となる.

1. (X, τ, β, ν) を計算可能位相空間.
2. M を X 上の確率測度の集合.
3. τ_A を M 上の A-topology
4. $\mu_A(u, v) = \{\mu \;:\; \mu(\nu^{\mathrm{fs}}(u)) > \nu_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(v)\}$.
5. $\nu_A = \bigcap \mu_A^{\mathrm{fs}}$.

計算可能な測度

定義

上記の空間の計算可能な点を計算可能な測度と呼ぶ.

定理

μ が計算可能 $\iff$ 開基の有限和の測度が一様に下側半計算可能

Schröder(2007) では上記 (と実質的に同値なもの) が定義として使われている.

計算可能な測度の例

例

$([0,1], \tau_< , \beta_< , \nu_<)$ は計算可能位相空間.

ただし，$\beta_< = \{(q,1] \ : \ q \quad \mathbb{Q} \}$.

ここで，$\tau_<$ は lower topology.

$\alpha < 1$ を計算不可能な left-c.e. 実数とする.

$$\mu(U) = \begin{matrix} 1 & \text{if } \alpha \quad U \\ 0 & \text{otherwise.} \end{matrix}$$

で定義される μ は計算可能な測度.

計算可能とc.e.

- 「計算可能が基本的で,
  c.e.は計算可能になりきれなかった
  欠陥物」
- 「c.e.が基本的で,
  計算可能は状況によって表れるもの」

計算可能分離公理

分離公理

$$
\begin{aligned}
T_0 :& (\forall x, y \in X, x \neq y)(\exists W \in \tau) \\
& ((x \in W \wedge y \notin W) \vee (x \notin W \wedge y \in W))), \\
T_1 :& (\forall x, y \in X, x \neq y)(\exists W \in \tau) \\
& (x \in W \wedge y \notin W), \\
T_2 :& (\forall x, y \in X, x \neq y)(\exists U, W \in \tau) \\
& (U \cap V = \emptyset \wedge x \in U \wedge y \in V), \\
T_3 :& (\forall x \in X, \forall A \in \mathcal{A}, x \notin A)(\exists U, W \in \tau) \\
& (U \cap V = \emptyset \wedge x \in U \wedge A \subseteq V).
\end{aligned}
$$

計算可能分離公理

SCT$_2$: There is a c.e. set H $\times$ such that

$(\ \ x, y,\ \ x = y)(\ \ (u, v)\ \ \ H)(x\ \ \ \nu(u)\ \ \ y\ \ \ \nu(v))$ and

$(\ \ (u, v)\ \ \ H)\nu(u)\ \ \ \nu(v) =\ \ .$

SCT$_3$: There is a c.e. set R $\mathrm{dom}(\nu) \times \mathrm{dom}(\nu)$ and a computable function $r :\ \ \ \times\ \ \ {}^{\omega}$ such that for all u, w $\mathrm{dom}(\nu)$,

$\nu(w) = \bigcup\{\nu(u)\ :\ (u, w)\ \ \ R\}$,

$(u, w)\ \ \ R\ \ \ \nu(u)\ \ \ \psi^{-}\ \ \ r(u, w)\ \ \ \nu(w).$

計算可能な距離化

定理 (Schröder 1998, Grubba-Schröder-Weihrauch 2007)

SCT_3 ならば，計算可能距離空間に埋め込める．　　　　　.

万能テスト

定義

(X,τ,β,ν) を計算可能位相空間とし，μ をその上の計算可能測度とする．

一様に c.e. 開集合の列 $\{U_n\}$ で，すべての n で $\mu(U_n)\le 2^{-n}$ となるものを，ML テストと呼ぶ．

ML テスト $\{U_n\}$ が万能であるとは，任意の ML テスト $\{V_n\}$ に対し，$\bigcap_n V_n \subseteq \bigcap_n U_n$ となることを言う．

万能テストの存在

定理 (Martin-Löf 1966)

2^ω とその上の一様測度に対して，万能テストは存在する．

定理 (Hoyrup&Rojas 2009)

任意の計算可能距離空間とその上の計算可能測度に対して，万能テストは存在する．

定理 (宮部)

万能テストが存在しないような計算可能位相空間とその上の計算可能測度が存在する．

万能測度が存在しない例

例

$([0,1], \tau_{<}, \beta_{<}, \nu_{<})$ は計算可能位相空間.

ただし，$\beta_{<} = \{(q,1] \ : \ q \quad \mathbf{Q}\}$.

ここで，$\tau_{<}$ は lower topology.

$\alpha < 1$ を計算不可能な left-c.e. 実数とする.

$$\mu(U) = \begin{array}{ll} 1 & \text{if } \alpha \quad U \\ 0 & \text{otherwise.} \end{array}$$

で定義される μ は計算可能な測度.

.

万能テストの存在する空間

定理 (宮部)

SCT_3 とその上の計算可能測度に対しては，万能テストは存在する.

定理 (宮部)

万能テストが存在しないような CT_2 とその上の計算可能測度が存在する.

複雑性による特徴付け

$A \in 2^\omega$ が μ ランダムでない $\iff$ すべての d である n があって

$$K(A \upharpoonright n) < -\log \mu([A \upharpoonright n]) - d$$

1. $K(\sigma)$ は上から近似可能
2. $-\log \mu([\sigma])$ は計算可能
3. Σ_1
4. $\mu([\sigma])$ は right-c.e.

complexity randomness

定義

x が complexity random であるとは，ある d が存在して，すべての閉集合 A に対し，

$$x \in A \Rightarrow Km(A) \geq -\log \mu(A) - d.$$

万能性

定理

x が complexity random であることと以下は同値．ある d が存在して，すべての $u \in \mathrm{dom}(\nu^{\mathrm{fs}})$ に対して，

$$x \in F(u) \Rightarrow K(u) \geq -\log \mu(F(u)) - d.$$

ただし，$F(u) = X \setminus \bigcup \nu^{\mathrm{fs}}(u)$.

いつ一致するか？

定理

SCT_3 なら，complexity random = ML-random

定理

一致しないような SCT_2 で T_3 とその上の計算可能測度が存在する

まとめ

- 開基で考えよう
- left-c.e.+分離公理
- 万能性はcomplexity randomnessの性質
- complexityによる特徴付けは閉集合での近似