

条件付き確率の計算可能性

冬のLAシンポジウム

2013年1月28日

宮部賢志

京都大学 数理解析研究所

条件付き確率の 計算可能性

確率は計算可能か？

確率論の基礎から応用まで、確率の概念とその計算可能性について詳しく解説します。

- ❖ 確率の概念は至る所で使われている。
数えきれないほどの何らかの確率が
「計算」されている。
- ❖ 一方、測度論の証明には、
「非構成的」なものが多い。

計算可能測度論

~~~~~

- ❖ 計算可能解析学の立場から
- ❖ アルゴリズム的ランダムネスの立場から
- ❖ 逆数学の立場から
- ❖ 予測理論の立場から

# 古典的条件付き確率

~~~~~

A, B を事象とし, $P(B) > 0$ とする.

B における A の条件付き確率は,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

で定義される.

ここで, $P(A|B)$ は $P(A \cap B)$ と $P(B)$ から「計算可能」であることが分かる.

問題設定

- 空間 $2^\omega \times 2^\omega$ を考える.
- その上の確率測度 μ が与えられているとする.
- 第一成分が $x \in 2^\omega$ であつたとする.
- 第二成分の確率測度を求めたい.

第一成分の確率測度 μ_1 は,

$$\mu_1(A) = \mu(A \times 2^\omega)$$

で求まる.

正則条件付き確率

定義 (Probability kernel, Transition measure)

関数 $\kappa : 2^\omega \times \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$ が以下を満たす時, κ を **probability kernel** と呼ぶ.

1. すべての $x \in 2^\omega$ に対して, $\kappa(x, -)$ が 2^ω 上の確率測度.
2. すべての $B \in \mathcal{B}$ に対して, $\kappa(-, B)$ は可測.

probability kernel κ が以下を満たす時, κ を**正則条件付き確率 (の変形)** と呼ぶ. すべての $A, B \in \mathcal{B}$ に対して,

$$\mu(A, B) = \int_A \kappa(x, B) d\mu_1(x).$$

ところが・・・

~~~~~

- ❖ 単に $\kappa$ に計算可能性を要求することは、  
不自然である。
- ❖ 計算可能であっても積分は計算不可能であるし、逆もまた計算不可能であるから。



# 素朴な方法

~~~~~

第一成分 x が $\sigma \prec x$ であるときの条件付き確率は,

$$\mu_2^\sigma([\tau]) = \frac{\mu([\sigma] \times [\tau])}{\mu([\sigma] \times 2^\omega)}$$

であるから, その極限として定義する.

$$\mu_2^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu([x \upharpoonright n] \times A)}{\mu([x \upharpoonright n] \times 2^\omega)}$$

疑問

μ_2^x は定義されるか? 測度になっているか?

.

ランダムネス登場

~~~~~

定理 (folklore?; Bienvenu-Hoyrup-Shen)

$\mu$  を計算可能な測度とする.  $x$  が計算可能ランダムならば,  $\mu_2^x$  は定義され, 測度になっている.

定理 (Ackermann-Freer-Roy)

以下を満たすような計算可能な測度で, Lebesgue 測度に対して絶対連続であるようなものが存在する. すなわち, すべての  $x$  に対して,

$$\mu_2^x \equiv_T x'.$$



# 問題

~~~~~

- ❖ 条件付き確率が計算可能な測度とは
どんな測度か？

L^1 計算可能性

L^1 計算可能性

定義

$$s = \sum_{k=1}^n q_k \mathbf{1}_{E_k}$$

の形の関数を**有理単関数** (rational step function) と呼ぶ. ここで $q_k \in \mathbb{Q}$ で, E_k は基本集合, 補基本集合の有限積.

関数 $f : \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, ある計算可能な有理単関数列 $\{s_n\}$ が存在して, すべての n で $\|f - s_n\|_1 \leq 2^{-n}$ となるとき, f は **L^1 計算可能** であると呼ぶ.

条件付き確率の計算可能性

~~~~~

定理 (M.)

$\lambda$  を  $2^\omega \times 2^\omega$  を一様測度とし,  $\mu$  は  $\lambda$  に対して  $L^1$  計算可能な密度を持つとする. この時, Schnorr ランダムな列  $x$  に対して,  $\mu_2^x$  は測度となり, 一様測度に対して以下の密度を持つ.

$$y \mapsto \frac{d\mu}{d\lambda}(x, y).$$

更に,  $\mu_2^x$  は  $x$  から計算可能である.



# 更に強い結果

~~~~~

定理 (M.)

μ を L^1 計算可能な密度を持つ確率測度とする.

この時, $x \mapsto \mu_2^x$ は Schnorr 各層計算可能である.

.

ちなみに

~~~~~

- ❖ 証明の方法は，計算可能ノルム付き空間への $L^1$ 計算可能性を経由する
- ❖ probability kernelの条件は弱められるべき