社団法人 電子情報通信学会
THE INSTITUTE OF ELECTRONICS,
INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

信学技報
TECHNICAL REPORT OF IEICE.

Merkleの基準のSchnorrおよびKurtzランダムネス版

宮部 賢志[†]

† 京都大学数理解析研究所
〒 606-8502 京都都市左京区北白川追分町
E-mail: †kmiyabe@kurims.kyoto-u.ac.jp

あらまし アルゴリズム的ランダムネスの理論において，Martin-Löf ランダムネスはよく研究されてきた概念であり，Martin-Löf ランダムネスの特徴付けは多く知られている．Merkle の基準はその一つであり，ランダムでない列の構成などで使われる有用な結果である．本論文では，その Schnorr ランダムネスおよび Kurtz ランダムネス版を与える．
キーワード アルゴリズム的ランダムネス，Merkle の基準，Schnorr ランダムネス，Kurtz ランダムネス

Schnorr and Kurtz randomness versions of Merkle's criterion

Kenshi MIYABE[†]

† Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University
Kitashirakawa-Oiwakecho, Sakyo-ku, Kyoto, 606-8502 Japan
E-mail: †kmiyabe@kurims.kyoto-u.ac.jp

Abstract In the theory of algorithmic randomness, Martin-Löf randomness has been well studied and we have known many characterizations of Martin-Löf randomness. Merkle's criterion is one of them and it is a useful result, for instance, to construct a non-random set. In this paper, we give Schnorr and Kurtz randomness versions.
Key words algorithmic randomness, Merkle's criterion, Schnorr randomness, Kurtz randomness

1. アルゴリズム的ランダムネス

アルゴリズム的ランダムネスの理論 [1], [2] では，2 進無限列が「ランダム」であることに対し，様々な数学的な定式化を与える．この節では自然なランダムの概念の定式化に最初に成功した Martin-Löf による定義とその複雑性による特徴づけを，現代的な方法で紹介する．

1.1 計算可能性理論

最初に計算可能性理論における基本的な概念を復習する．詳細は [3], [4] などを参照して欲しい．2 進有限列の集合を $2^{<\omega}$ で表す．部分関数 $f:\subseteq 2^{<\omega}\to 2^{<\omega}$ が計算可能 であるとは，Turing マシンにより計算可能であることを言う．集合 $A\subseteq\omega$ が計算可能 であるとは，計算可能な全域関数 $f:\omega\to\{0,1\}$ が存在して，すべての n で $f(n)=1 \iff n\in A$ となることを言う．集合 $A\subseteq\omega$ が c.e.(computably enumerable, 計算可能に枚挙可能) であるとは，計算可能な部分関数 $f:\subseteq\omega\to\{0,1\}$ が存在して，$A=\mathrm{dom}(f)$ となることを言う．実数 α が計算可能であるとは，計算可能な有理数列 $\{q_n\}$ が存在して，すべての n で $|\alpha-q_n|\leqq 2^{-n}$ となることを言う．実数 α が c.e. であるとは，計算可能な単調非減少有理数列 $\{q_n\}$ が存在して，$\lim_n q_n=\alpha$ となることを言う．

1.2 Cantor 空間

2 進無限列の集合を 2^ω で表す．それぞれの $\sigma\in 2^{<\omega}$ に対し，$[\sigma]=\{A\in 2^\omega\ :\ \sigma\prec A\}$ とおく．ただし，$\sigma\prec A$ は σ が A の接頭辞であることを表す．2^ω 上に $\{[\sigma]\ :\ \sigma\in 2^{<\omega}\}$ を開基として作られる位相を入れた空間を Cantor 空間と呼び，単に 2^ω で表す．2^ω 上の一様測度を μ で表す．すなわち，すべての $\sigma\in 2^{<\omega}$ に対し，$\mu([\sigma])=2^{-|\sigma|}$ である．開集合 $U\subseteq 2^\omega$ が c.e. であるとは，$U=\bigcup_{\sigma\in S}[\sigma]$ となる c.e. 集合 S が存在することを言う．

1.3 Martin-Löf ランダムネス

統計における仮説検定では，与えられた点が確率の非常に小さい集合に含まれていると，それは不自然であると判断する．2^ω 上の点（すなわち 2 進無限列）が「ランダム」であることを，計算可能に作ることができる確率 0 の集合に含まれていないこととして定義しよう．

定義 1.1 (Martin-Löf [5])．一様に *c.e.* 開集合の列 $\{U_n\}$ がすべての n で $\mu(U_n)\leqq 2^{-n}$ を満たすとき，$\{U_n\}$ を *Martin-Löf* テスト と呼ぶ．$X\in 2^\omega$ が *Martin-Löf* ランダム であるとは，すべての *Martin-Löf* テスト $\{U_n\}$ に対し，$X\notin\bigcap_n U_n$ であることを言う．

Martin-Löf ランダムネスはランダムな概念が持つべき自然な性質を多く持っている．中でも特筆すべきなのは複雑性による特徴付けである．

まず，prefix-free Kolmogorov 複雑性を定義しよう．以下では マシン という言葉を，部分計算可能関数 $f :\subseteq 2^{<\omega} \to 2^{<\omega}$ の略語として使う．集合 $S \subset 2^{<\omega}$ が prefix-free であるとは，どの異なる 2 つの元も互いの接頭辞になっていないことを言う．すなわち，$\sigma, \tau \in S \Rightarrow \sigma \not\prec \tau$ を満たすことを言う．マシン M が prefix-free であるとは，M の定義域 $\mathrm{dom}(M)$ が prefix-free であることを言う．$\sigma \in 2^{<\omega}$ の prefix-free マシン M による Kolmogorov 複雑性 を，

$$K_M(\sigma) = \min\{|\tau| \ : \ M(\tau) = \sigma\}$$

により定義する．M をプログラミング言語と思うならば，σ を出力するプログラム τ の最小の長さによって，σ の複雑性を定義している．Kolmogorov 複雑性は prefix-free マシンに依存して決まるが，以下の意味で 万能な prefix-free マシンU が存在する．任意の prefix-free マシン M に対して，ある定数 $c \in \omega$ が存在して，すべての $\sigma \in 2^{<\omega}$ に対し，

$$K_U(\sigma) \leqq K_M(\sigma) + c$$

を満たす．以下では万能マシン U を固定して，$K = K_U$ と書く．

定理 1.2 (Schnorr [6], Levin [7], Chaitin [8])．$X \in 2^\omega$ に関して以下は同値．

(i) X は *Martin-Löf* ランダム．

(ii) ある $d \in \omega$ が存在して，すべての $n \in \omega$ に対して，$K(X \upharpoonright n) > n - d$ を満たす．

ここで，$X \upharpoonright n$ は X の最初の n 桁を表す．

1.4 Merkle の基準

Martin-Löf ランダムネスの特徴付けとしては，他にもマルチンゲールなど様々なものが知られている．ここでは，Merkle の基準と呼ばれているものを紹介しよう．

定理 1.3 ([2, Proposition 3.2.17] などを参照)．$X \in 2^\omega$ に関して以下は同値．

(i) X は *Martin-Löf* ランダムではない．

(ii) $K(x_i) \leqq |x_i| - 1$ を満たす列 $\{x_i\}$ が存在して，$X = x_0x_1x_2\cdots$ となる．

(iii) ある *prefix-free* マシン M と $K_M(x_i) \leqq |x_i| - 1$ を満たす列 $\{x_i\}$ が存在して，$X = x_0x_1x_2\cdots$ となる．

この定理は 1 桁圧縮できるような有限列の結合として書けることと，ランダムでないことが同値であることを主張している．ランダムでない列を構成する上で，それまで作った文字列に依存しないため，特に lowness の研究 [9]〜[14] において重要な役割 [15], [16]([2, Theorem 5.1.9, 5.1.33]) を果たす．

2. Merkle の基準の変形

2.1 Schnorr ランダムネス版

ここからは，前節の結果の Schnorr ランダムネス版を考えていこう．ランダムネスの理論では様々なランダムの概念を定義する．Martin-Löf テスト $\{U_n\}$ に対し，$\mu(U_n)$ は一般に c.e. であり計算可能ではない．これは不自然であると考え，Schnorr は次の概念を提案した．

定義 2.1 (Schnorr [17], [18])．$\mu(U_n)$ が一様に計算可能であるような *Martin-Löf* テスト $\{U_n\}$ を，*Schnorr* テスト と呼ぶ．$X \in 2^\omega$ が *Schnorr* テストであるとは，すべての *Schnorr* テスト $\{U_n\}$ に対し，$X \notin \bigcap_n U_n$ であることを言う．

明らかに，Martin-Löf ランダムならば Schnorr ランダムである．Schnorr ランダムネスの複雑性による特徴付けは長らく問題であったが，2000 年代に入ってから次のような形で与えられた．

定義 2.2 (Downey and Griffiths [19])．*prefix-free* マシン M の 測度 とは $\mu([\![\mathrm{dom} M]\!])$ のことを言う．

定理 2.3 (Downey and Griffiths [19])．$X \in 2^\omega$ に関して以下は同値．

(i) X は *Schnorr* ランダム．

(ii) 任意の計算可能な測度を持つマシン M に対して，ある $d \in \omega$ が存在して，すべての n で $K_M(X \upharpoonright n) \geqq n - d$.

万能な計算可能な測度を持つマシンは存在しないこともよく知られている．

Martin-Löf ランダムネスの場合と同様，Schnorr ランダムネスに対しても lowness の研究が盛んに行われている [20]〜[24]．ランダムの諸概念の lowness の研究が進む中で，開被覆による特徴付けが知られるようになってきた．その流れでランダムネスの諸概念の次の形の特徴付けが注目されるようになった．後に見るように実質的に Merkle の基準と同じものである．

開集合 U が 有界(bounded) であるとは，$\mu(U) < 1$ であることを意味する．$X = X(0)X(1)X(2)\cdots \in 2^\omega$ の 尾(tail) とは，ある n に対して $X(n)X(n+1)X(n+2)\cdots \in 2^\omega$ となる列のことを言う．prefix-free 集合 $S \in 2^{<\omega}$ に対し，$U = \bigcup_{\sigma \in S}[\sigma]$ を，S から 作られる(generate) 開集合と呼び，必要に応じて同一視する．

定理 2.4 (Kučera [25])．$X \in 2^\omega$ に関して以下は同値．

(i) X は *Martin-Löf* ランダムではない．

(ii) 有界な *c.e.* 開集合 U が存在して，X のすべての尾が U に含まれる．

(iii) 有界な *c.e. prefix-free* 集合 S が存在して，$X \in S^\omega$ を満たす．

定理 2.5 (Bienvenu and Miller [26])．$X \in 2^\omega$ に関して以下は同値．

(i) X は *Schnorr* ランダムではない．

(ii) 有界で計算可能な測度を持つ *c.e.* 開集合 U が存在して，X のすべての尾が U に含まれる．

(iii) 有界で計算可能な測度を持つ *c.e. prefix-free* 集合 S が存在して，$X \in S^\omega$ を満たす．

これらの定理において，(2),(3) の「有界で」（すなわち測度が 1 未満）を「測度が 1/2 以下の」に置き換えても成り立つことは証明から明らかである．この定理を経由して，Schnorr ランダムネスに対しても，Merkle の基準の形での特徴づけを与えよう．

定理 2.6. $X \in 2^\omega$ に関して以下は同値．

(i) X は *Schnorr* ランダムではない．

(ii) ある計算可能な測度を持つマシン M と $K_M(x_i) \leqq |x_i| - 1$ を満たす列 $\{x_i\}$ が存在して，$X = x_0x_1x_2\cdots$ となる．

以下の基本的な結果を思い出しておこう．

定理 2.7 (KC 定理; Levin [27], Schnorr [6], Chaitin [8])**.** $\{\langle d_i, \tau_i\rangle\}_{i\in\omega}$ を計算可能なペアで，$d_i \in \omega$ かつ $\tau_i \in 2^{<\omega}$ で，$\sum_i 2^{-d_i} \leqq 1$ を満たすものとする．この時，*prefix-free* マシン M と長さ d_i の $\sigma_i \in 2^{<\omega}$ が存在して，すべての i で $M(\sigma_i) = \tau_i$ かつ $\mathrm{dom}M = \{\sigma_i : i \in \omega\}$ を満たす．

ここで，$\{\langle d_i, \tau_i\rangle\}_{i\in\omega}$ は KC 集合 と呼ばれ，その重さ(weight) は $\sum_i 2^{-d_i}$ である．

定理 *2.6* の証明． (i)⇒(ii): X は Schnorr ランダムではないとしよう．定理 2.5 より，1/2 以下の計算可能な測度を持つ c.e. prefix-free 集合 S が存在して，$X \in S^\omega$ を満たす．計算可能な列 $\langle |\sigma| - 1, \sigma\rangle_{\sigma\in S}$ を考えると，その重さは

$$\sum_{\sigma\in S} 2^{-(|\sigma|-1)} \leqq 1$$

であるから，計算可能な重さを持つ KC 集合である．この KC 集合から作られる計算可能な測度を持つマシンを M とすると，すべての $\sigma \in S$ に対して，

$$K_M(\sigma) \leqq |\sigma| - 1$$

である．$X \in S^\omega$ より，$\sigma \in S$ が存在して，$X \upharpoonright |\sigma| = \sigma$ となる．この σ を x_0 とおく．X から最初の $|x_0|$ 桁を除いた列もまた S^ω に含まれるから，同様にして，$x_1, x_2, \cdots \in S$ を見つけることができる．

(ii)⇒(i): （必要ならば定義域を拡張することで）$\mu(\mathrm{dom}M) = 1$ として良い．N を，有限個の n を除いてすべての n で $K(0^n) \leqq 2\log n$ を満たす計算可能な測度を持つマシンとする．

更にマシン L を

$$L(u\sigma_0\cdots\sigma_{n-1}) = \begin{cases} M(\sigma_0)\cdots M(\sigma_{n-1}) & N(u) = 0^n\text{の時} \\ \uparrow & \text{その他} \end{cases}$$

で定義する．M, N は prefix-free だから $u, \sigma_0, \cdots, \sigma_{n-1}$ の分割は一意に決まる．よって，L は prefix-free マシンである．また，

$$\begin{aligned}\mu([\![\mathrm{dom}L]\!]) &= \sum_{N(u)\downarrow} 2^{-|u|}(\mu([\![\mathrm{dom}(M)]\!]))^{N(u)} \\ &= \mu([\![\mathrm{dom}N]\!])\end{aligned}$$

より，L は計算可能な測度を持つ．

これより，有限個の n を除いてすべての n で，

$$\begin{aligned}K_L(x_0\cdots x_{n-1}) &\leqq K_N(n) + \sum_{i=0}^{n-1} K_M(x_i) \\ &\leqq 2\log n + \sum_{i=0}^{n-1} |x_i| - n \\ &= |x_0\cdots x_{n-1}| - (n - 2\log n)\end{aligned}$$

定理 2.3 より，X は Schnorr ランダムではない． □

2.2 Kurtz ランダムネス版

次に Kurtz ランダムネス版を与える．まず，Kurtz ランダムネスに関する基本的な結果を見る．

定義 2.8 (Kurtz [28])**.** $A \in 2^\omega$ が *Kurtz* ランダム であるとは，すべての測度 *1* の *c.e.* 開集合に含まれることを言う．

Kurtz ランダムネスは自然なランダムの概念であるとは言えない性質を持っている．例えば，Kurtz ランダムな列で大数の法則を満たさない列が存在する．Kurtz ランダムネスは，弱ランダムネス(weak randomness) とも呼ばれる．

テストによる特徴づけを与えておく．

定義 2.9 (Wang [29])**.** *Kurtz* 零テスト とは，*Martin-Löf* テスト $\{U_n\}$ で，ある計算可能な関数 $f : \omega \to (2^{<\omega})^{<\omega}$ が存在して，すべての n で $U_n = [\![f(n)]\!]$ となるものを言う．

定理 2.10 (Wang [29])**.** $X \in 2^\omega$ に関して以下は同値．

(i) X は *Kurtz* ランダムである．

(ii) すべての *Kurtz* 零テスト $\{U_n\}$ に対して，$X \notin \bigcap_n U_n$．

これより，Schnorr ランダムならば Kurtz ランダムであることが分かる．

次に複雑性による特徴づけを与えよう．

定理 2.11 (Downey, Griffiths and Reid [30])**.** $X \in 2^\omega$ に関して以下は同値．

(i) X は *Kurtz* ランダムではない．

(ii) ある計算可能な測度を持つマシン M と計算可能な関数 f が存在して，すべての n で $K_M(A \upharpoonright f(n)) < f(n) - n$ を満たす．

関数 $f : \omega \to \omega$ が order であるとは，非減少かつ非有界であることを言う．マシン M が 決定可能 とは，$\mathrm{dom}M$ が計算可能であることを言う．

定理 2.12 (Downey, Griffiths and Reid [30])**.** $X \in 2^\omega$ に関して以下は同値．

(i) X は *Kurtz* ランダムではない．

(ii) ある決定可能な *prefix-free* マシン M と計算可能な *order* f が存在して，すべての n で $K_M(A \upharpoonright f(n)) \leqq f(n) - n$ を満たす．

これらの結果を念頭において，Merkle の基準の Kurtz ラン

ダムネス版を与えよう．

定理 2.13. $X \in 2^\omega$ に関して以下は同値．

(i) X は *Kurtz* ランダムではない．

(ii) ある計算可能な *order* l と計算可能な測度を持つマシン M が存在して，すべての n で，

$$K_M(X \upharpoonright [l(n), l(n+1))) \leqq l(n+1) - l(n) - 1 \qquad (1)$$

を満たす．

(iii) ある計算可能な *order* l と決定可能な *prefix-free* マシン M が存在して，すべての n で，(1) を満たす．

ここで，$m < n (m, n \in \omega)$ に対し，

$$X \upharpoonright [m, n) = X(m)X(m+1)\cdots X(n-1) \in 2^{n-m}$$

であり，

$$X \upharpoonright [0, n) = X \upharpoonright n$$

である．

証明． (i)⇒(ii): X は Kurtz ランダムではないとしよう．すると，Kurtz 零テスト $\{U_n\}$ が存在して，$X \in \bigcap_n U_n$．特に，計算可能な関数 $f : \omega \to (2^{<\omega})^{<\omega}$ と計算可能な order u が存在して，すべての n で $f(n) \subseteqq 2^{u(n)}$，$|f(n)| = 2^{u(n)-n}$，$A \upharpoonright u(n) \in f(n)$ を満たすとしてよい．更に，$u(0) = 0$ かつ u は単調増加とする．

計算可能な単調増加関数 k を，$k(0) = 0$,

$$k(n+1) = u(k(n)) + n + 2$$

で定義し，$l(n) = u(k(n))$ に対して，(ii) の条件を満たすようなマシン M を作ろう．

KC 集合を

$$\{\langle l(n+1) - l(n) - 1, \sigma \upharpoonright [l(n), l(n+1))\rangle\}_{n\in\omega, \sigma\in f(k(n+1))}$$

で定義する．ここで，

$$\sigma \in f(k(n+1)) \Rightarrow |\sigma| = u(k(n+1)) = l(n+1)$$

であることに注意しよう．この重さは

$$\begin{aligned}
&\sum_n \sum_{\sigma\in f(k(n+1))} 2^{-(l(n+1)-l(n)-1)} \\
&= \sum_n 2^{u(k(n+1))-k(n+1)} \cdot 2^{-u(k(n+1))+u(k(n))+1} \\
&= \sum_n 2^{-n-1} = 1.
\end{aligned}$$

よって，この KC 集合から作られるマシン M は計算可能な測度を持つ．すべての n に対して，

$$\sigma_n := X \upharpoonright u(n) \in f(n)$$

だから，各 n に対して，

$$M(\tau_n) = X \upharpoonright [l(n), l(n+1))$$

となる $\tau_n \in 2^{l(n+1)-l(n)-1}$ が存在する．よって，

$$K_M(X \upharpoonright [l(n), l(n+1))) \leqq l(n+1) - l(n) - 1.$$

(ii)⇒(iii):計算可能な測度を持つマシンは決定可能であるから明らか．

(iii)⇒(i): ある計算可能な order l と決定可能な prefix-free マシン M が存在して，すべての n で，

$$K_M(X \upharpoonright [l(n), l(n+1))) \leqq l(n+1) - l(n) - 1$$

を満たすとしよう．Kurtz 零テストを次のように作る．λ を空列として，$S_0 = \{\lambda\}$,

$$S_{n+1} = \{M(\sigma) \;:\; \sigma \in 2^{l(n+1)-l(n)},\ M(\sigma) = l(n+1) - l(n)\}.$$

M は prefix-free なので，$\mu([\![S_{n+1}]\!]) \leqq 2^{-1}$．計算可能な関数 $f : \omega \to (2^{<\omega})^{<\omega}$ を次で定義する．

$$f(n) = \{x_1 \cdots x_n \;:\; x_i \in S_i,\ i = 1, \cdots, n\}.$$

すると，

$$\mu([\![f(n)]\!]) = \prod_{i=1}^n \mu([\![S_i]\!]) \leqq 2^{-n}.$$

よって，$\{[\![f(n)]\!]\}_n$ は Kurtz 零テスト．すべての n で $X \in [\![f(n)]\!]$ であるから，X は Kurtz ランダムではない． □

文　献

[1] R. Downey and D.R. Hirschfeldt, Algorithmic Randomness and Complexity, Springer, Berlin, 2010.

[2] A. Nies, Computability and Randomness, Oxford University Press, USA, 2009.

[3] M. Sipser, Introduction to the Theory of Computation, second edition edition, Course Technology Ptr, 2012.

[4] R.I. Soare, Recursively enumerable sets and degrees, Perspectives in Mathematical Logic, Springer, Berlin, 1987.

[5] P. Martin-Löf, “The Definition of Random Sequences,” Information and Control, vol.9, no.6, pp.602–619, 1966.

[6] C.P. Schnorr, “Process complexity and effective random tests,” Journal of Computer and System Sciences, vol.7, pp.376–388, 1973.

[7] L.A. Levin, “On the notion of a random sequence,” Soviet Mathematics Doklady, vol.14, pp.1413–1416, 1973.

[8] G.J. Chaitin, “A theory of program size formally identical to information theory,” Journal of the Association for Computing Machinery, vol.22, pp.329–340, 1975.

[9] D. Zambella, “On sequences with simple initial segments,” Technical report, Univ. Amsterdam, 1990. ILLC technical report ML 1990-05.

[10] A. Kučera and S. Terwijn, “Lowness for the class of random sets,” J. Symbolic Logic, vol.64, pp.1396–1402, 1999.

[11] A. Nies, “Lowness properties and randomness,” Advances in Mathematics, vol.197, pp.274–305, 2005.

[12] A. Nies, “Non-cupping and randomness,” Proceedings of the American Mathematical Society, vol.135, no.3, pp.837–844, 2007.

[13] A. Nies, “Low for random reals: the story,” Unpublished manuscript. `http://www.cs.auckland.ac.nz/~nies/papers/LRpreprint.pdf`

[14] A. Nies, “Eliminating concepts,” Computational prospects of infinity II, vol.15, pp.225–248, IMS Lecture Notes Series, 2008.

[15] B. Kjos-Hanssen, “Low for random reals and positive-measure domination,” Proc. Amer. Math. Soc., vol.135, no.11, pp.3703–3709, 2007.

[16] R. Downey, A. Nies, R. Weber, and L. Yu, “Lowness and Π^0_2 nullsets,” J. Symbolic Logic, vol.71, no.3, pp.1044–1052, 2006.

[17] C.P. Schnorr, “A unified approach to the definition of a random sequence,” Mathematical Systems Theory, vol.5, pp.246–258, 1971.

[18] C.P. Schnorr, Zufälligkeit und Wahrscheinlichkeit, vol.218, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[19] R. Downey and E. Griffiths, “Schnorr randomness,” Journal of Symbolic Logic, vol.69, no.2, pp.533–554, 2004.

[20] S.A. Terwijn and D. Zambella, “Computational randomness and lowness,” Journal of Symbolic Logic, vol.66, no.3, pp.1199–1205, 2001.

[21] B. Kjos-Hanssen, A. Nies, and F. Stephan, “Lowness for the Class of Schnorr Random Reals,” SIAM Journal on Computing, vol.35, no.3, pp.647–657, 2005.

[22] R. Downey, N. Greenberg, N. Mihailovic, and A. Nies, “Lowness for computable machines,” Computational Prospects of Infinity: Part II, eds. by C.T. Chong, Q. Feng, T.A. Slaman, W.H. Woodin, and Y. Yang, pp.79–86, Lecture Notes Series, World Scientific Publishing Company, 2008.

[23] J.N.Y. Franklin and F. Stephan, “Schnorr trivial sets and truth-table reducibility,” Journal of Symbolic Logic, vol.75, no.2, pp.501–521, 2010.

[24] K. Miyabe, “Truth-table Schnorr randomness and truth-table reducible randomness,” Mathematical Logic Quarterly, vol.57, no.3, pp.323–338, 2011.

[25] A. Kučera, “Measure, Π^0_1 classes, and complete extensions of PA,” Recursion Theory Week, vol.1141, pp.245–259, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, 1985.

[26] L. Bienvenu and J.S. Miller, “Randomness and lowness notions via open covers,” Annals of Pure and Applied Logic, vol.163, pp.506–518, 2012.

[27] L.A. Levin, “Some Theorems on the Algorithmic Approach to Probability Theory and Information Theory,” PhD thesis, Moscow, 1971.

[28] S.A. Kurtz, “Randomness and Genericity in the Degrees of Unsolvability,” PhD thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1981.

[29] Y. Wang, “Randomness and complexity,” PhD thesis, University of Heidelberg, 1996.

[30] R.G. Downey, E.J. Griffiths, and S. Reid, “On Kurtz randomness,” Theoretical Computer Science, vol.321, pp.249–270, 2004.