一様Kurtzランダムネスに対する独立性定理

京都大学

2013年3月21日

宮部賢志
京都大学　数理解析研究所

アブストラクトの訂正

定理 **2.4** までは正しい (はず).

> 定理 **2.5** $A \oplus B$ が Kurtz ランダム $\iff$ A が Kurtz ランダムかつ B が A 一様 Kurtz ランダム

これは不成立.

今日の話

正しくはどういう形なのか．なぜ間違えたのか.

独立性定理

独立性定理

定理 (van Lambalge '87)

A, B に関して以下は同値.

1. $A \oplus B$ が ML ランダム.
2. A が ML ランダム，かつ，B が A-ML ランダム.

(1)⇒(2) は，"easy direction"

(2)⇒(1) は，"difficult direction" と呼ばれる.

ランダムの諸概念

- Demuthランダムネス
- 弱2ランダムネス
- MLランダムネス
- Kolmogorov-Lovelandランダムネス
- 計算可能ランダムネス
- Schnorrランダムネス
- Kurtzランダムネス

不成立一覧

- 計算可能ランダムでは不成立（Merkle-Miller-Nies-Reimann-Stephan ’06）
- Schnorrランダムでは不成立（Yu ’07）
- Kurtzランダムでは不成立（Franklin-Stephan ’11）
- 例外：Kolmogorov-Loveland randomnessでは弱い形で成立（Merkle-Miller-Nies-Reimann-Stephan ’06）

一様相対化

- 一様Schnorrランダムでは成立（M. '11, M.-Rute to appear）
- 一様計算可能ランダムでは弱い形で成立（M. '11, M.-Rute to appear）
- Demuthランダムでは不成立，Demuth_BLRランダムでは成立（Diamondstone-Greenberg-Turetsky submitted）

一様相対化にすれば,

すべて上手くいくのでは？

Kurtzランダムネスでは？

定理 (Franklin-Stephan '11)

- A が Kurtz ランダムで，B が A-Kurtz ランダムなら，$A \oplus B$ は Kurtz ランダム.
- $A \oplus B$ は Kurtz ランダムだが，A, B は互いに Kurtz ランダムでない A, B が存在する.

つまり，"difficult direction" は成り立つが，"easy direction" は成り立たない.

一様Kurtzランダムネス

1. X が Kurtz random

   $\iff$ すべての測度 1 の c.e. 開集合に含まれる.

2. X が Kurtz random relative to A

   $\iff$ すべての測度 1 の A-c.e. 開集合に含まれる.

3. X が Kurtz random uniformly relative to A

   $\iff$ 次を満たすすべての計算可能な $f : 2^\omega \to \tau$ に関して $X \in f(A)$. すべての $Z \in 2^\omega$ に対して $\mu(f(Z)) = 1$.

easy direction

定理 (M.)

$A \oplus B$ が Kurtz ランダムならば,

B は Kurtz random uniformly relative to A.

difficult direction

定理 (M.)

A, B は互いに一様 Kurtz ランダムだが,

$A \oplus B$ は Kurtz ランダムではないような A, B が存在する.

つまり, ”easy direction”は成り立つが, ”difficult direction”
は成り立たない！

再考

- なぜ一様Kurtzランダムネスでは独立性定理が成り立たないのか？
- Kurtzランダムの概念が「弱すぎる」から，独立性定理が「弱い形」でしか成り立たない

計算可能な結合

定義 (M.)

$h, g : \omega \to \omega$ を計算可能な単調増加関数で

$$\omega = \{h(n) \ : \ n \in \omega\} \cup \{g(n) \ : \ n \in \omega\}$$

を満たすものとする．この時，$A, B \in 2^\omega$ に対して，$A \oplus_h B = X$ を，

$$X(h(n)) = A(n),\ X(g(n)) = B(n)$$

で定義し，そのような h, g が存在するとき，$\oplus_h$ を計算可能な結合と呼ぶ．

一様Kurtzランダムネスに対する独立性定理

定理 (M.)

$X \in 2^\omega$ に関して以下は同値.

1. X は Kurtz ランダム
2. すべての計算可能な結合 $\oplus_h$ に対し，$X = A \oplus_h B$ と置くと，A, B は互いに一様 Kurtz ランダム.