

もう1つの確率論の流れ

宮部賢志 (京都大学)*

1. von Mises の理論はその後どうなったのか

現代確率論は、1900年のHilbertが国際数学会議において確率の公理的取り扱いを求めたことに始まるというべきであろう。19世紀終わりになって、確率が物理学において基本的役割を果たし始めるようになった時、確率の厳密な取り扱いが求められていた。しかし、これがすでにミスリードであったのである。

1933年、Kolmogorov [3]により確率の公理が提案され、数学的な取り扱いができるようになった。同時に、その公理を満たすものであれば確率と呼べるという意味で、確率とは何かという哲学的問いには答えない。実際、科学哲学の分野では今でも「確率とは何か」という議論が行われている [2]。

一方、1919年に始まる von Mises の collective の研究 [10, 11, 12] では、「確率の公理を設定する」という方法とは違う方法が取られている。19世紀における統計学の発展を背景に、「確率とは頻度である」という考え方を定式化しようとしたのである。以下の言葉は、von Mises の理論を要約した言葉として知られる。

First the Collective - then the Probability. [12]

collective とは、von Mises が定義しようとした「ランダムな列」のことである。しかし collective は必ずしも重複対数の法則を満たさず、ランダムな列の定義としては不十分であった。また、von Mises の確率論は確率の公理から出発する確率論に比べて複雑で、確率論の主流にはならなかった。

von Mises の試みは全く的外れのものだったのであろうか。そうではない。von Mises の議論は統計学を始め様々な分野に重要な影響を与えている。今は Kolmogorov [4] の以下の言葉を紹介する。

I have already expressed the point of view that the basis of the applicability of the mathematical theory of probability to random events of the real world is the frequency approach to probability in one form or another, which was so strongly advocated by von Mises.

2. アルゴリズム情報理論

1966年、Martin-Löf [5]によりランダムな列の数学的定義が提案された。その後、1970年代には、Kolmogorov, Levin, Schnorrらにより、ランダムな列が予測不可能性や圧縮不可能性により特徴づけられることが分かった。しかし、Kolmogorov自身はこれを確率論の構築には使わず、直接予測の方法に応用している。その後、ランダムな列の研究はアルゴリズム的ランダムネスの理論 (algorithmic randomness) [1, 6] として続けられている。

* 〒606-8502 京都府京都市左京区北白川追分町 京都大学 数理解析研究所
e-mail: kmiyabe@kurims.kyoto-u.ac.jp
web: <http://kenshi.miyabe.name/wordpress/>

一方, Solomonoff [8, 9] は人工知能の研究の中で, 圧縮不可能性から最善の予測が導けることを示し, その予測をアルゴリズム的確率 (algorithmic probability) と呼んだ. ここでも「ランダムな概念から確率の概念が導かれる」という考え方が見て取れる. しかし, 様々な数学的な問題があり, 確率論としては認知されておらず, 一般には Solomonoff's induction と呼ばれている. また最小記述長の理論という形でも応用されている.

これらの理論はまとめてアルゴリズム情報理論と呼ばれている.

3. ゲーム論的確率論

von Mises の確率論やランダムネスの理論などを受けて, Vovk と Shafer らはゲーム論を基礎において確率論を構築した [7]. マルチンゲールに関する Ville の定理を理論の基礎として使っており, 予測不可能性から確率の概念を導いている.

4. まとめ

確率の公理を出発点にした場合, 確率の概念によってランダムな現象を表現する. 現在, 確率はそのようにモデルとして広く使われている. それに対して, von Mises, Kolmogorov, Solomonoff の考え方, そしてゲーム論的確率論には, 「ランダムな概念から確率の概念が導かれる」という一貫した流れがある. この見方はデータを直接扱う点や計算可能性との関係が明らかである点で, 確率をモデルとして扱う方法よりも根本的な点で様々なメリットがある. 現在ではまだ考え方の類似にすぎないが, 数学的に厳密に記述できるようになった時, 確率に対する見方が大きく変わるように思われる.

参考文献

- [1] R. Downey and D. R. Hirschfeldt. *Algorithmic Randomness and Complexity*. Springer, Berlin, 2010.
- [2] D. Gillies. *Philosophical theories of probability*. Routledge, 2000.
- [3] A. Kolmogorov. *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Springer, 1933.
- [4] A. N. Kolmogorov. On tables of random numbers. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A*, 25(4):369–376, 1963.
- [5] P. Martin-Löf. The Definition of Random Sequences. *Information and Control*, 9(6):602–619, 1966.
- [6] A. Nies. *Computability and Randomness*. Oxford University Press, USA, 2009.
- [7] G. Shafer and V. Vovk. *Probability and Finance: It's Only a Game!* Wiley, 2001.
- [8] R. J. Solomonoff. A formal theory of inductive inference I, II. *Information and Control*, 7:1–22, 224–254, 1964.
- [9] R. J. Solomonoff. Complexity-based induction systems: Comparisons and convergence theorems. *IEEE Transaction on Information Theory*, IT-24:422–432, 1978.
- [10] R. von Mises. Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Mathematische Zeitschrift*, 5:52–99, 1919.
- [11] R. von Mises. *Mathematical theory of probability and statistics*. Academic Press Inc, 1964.
- [12] R. von Mises. *Probability, statistics, and truth*. Dover Pubns, 1981.