一様 Kurtz ランダムネスに対する独立性定理

宮部賢志　(京都大学)*

1. 独立性定理の重要性

ある2進無限列が与えられたときに，それが「ランダム」であるとは何を意味するか．von Mises による collective の研究 (1919) に始まるこの問いは，Martin-Löf ランダムネスの概念 (1966) が定義されたことで，数学的に議論できるようになった．いくつかの特徴付けが与えられたことで Martin-Löf ランダムネスは自然なランダムの概念であると認められるようになった一方，Schnorr ランダムネス，Kurtz ランダムネス，Demuth ランダムネスなど様々な概念が提案され，その性質が調べられている．

では「ある列から見て別の列がランダム」であるとは何を意味するのか．この「相対的にランダム」であることの定義には，つい最近まで計算可能性理論における Turing 還元に相当する相対化のみが考えられてきた．このことは，計算可能性理論において Turing 還元の研究がよくなされてきたことや，Martin-Löf ランダムネスとの相性が良いことに原因があると思われる．実際に以下の定理が成り立つ．

定理 1.1 (独立性定理; van Lambalgen [8]). *$A \oplus B$ が ML ランダム $\iff$ A が ML ランダムかつ B が A-ML ランダム．*

通常の確率論の枠組みにおける「独立」や，統計における「無相関」は，非常に重要な概念である．同じようにランダムネスの研究においてこの定理は非常に重要であり，様々な定理の証明で使われる．また「定義」ではなく「定理」であり，独立や無相関という概念を明らかにしていると見ることもできる．

この独立性定理は Schnorr ランダムネスや Kurtz ランダムネスでは，成り立たないことが知られていた．ただし，それは Turing 還元に相当する相対化においてである．筆者は以前の研究で truth-table 還元に相当する相対化においては，Schnorr ランダムネスに対しても独立性定理が成り立つことを示した．

定理 1.2 (宮部 [6], 宮部-Rute [7]). *$A \oplus B$ が Schnorr ランダム $\iff$ A が Schnorr ランダムかつ B が A 一様 Schnorr ランダム．*

この観察を元に宮部 [6] では，

> 独立性定理を各ランダムの概念に対する「正しい」相対化の基準としてはどうか．

という提案を行った．これを受けて Diamondstone ら [2] らは Demuth ランダムネスに対する独立性定理を示している．また Barmpalias ら [1] らは弱2ランダムネスに関して部分相対化を考察している．

2. Kurtz ランダムネスに対する独立性定理

このような文脈の元で Kurtz ランダムネスの「正しい」相対化を与えよう．

---

* 〒606-8502 京都府京都市左京区北白川追分町　京都大学　数理解析研究所
e-mail: `kmiyabe@kurims.kyoto-u.ac.jp`
web: `http://kenshi.miyabe.name/wordpress/`

定義 2.1 (Kurtz [4])**.** *すべての測度 1 の c.e. 開集合に含まれる列を Kurtz ランダムな列と呼ぶ.*

先ほども述べたように Kurtz ランダムネスでは独立性定理が成り立たない.

定理 2.2 (Franklin [3])**.** *A が Kurtz ランダムかつ B が A-Kurtz ランダムなら，$A \oplus B$ は Kurtz ランダム．$A \oplus B$ は Kurtz ランダムであるが，A, B は互いにランダムでないような A, B が存在する.*

そこで独立性定理が成り立つように，Schnorr ランダムネスの場合と同じ一様相対化を考える.

定義 2.3 (宮部)**.** *計算可能な関数 $f : 2^\omega \to \tau$ ですべての X で $\mu(f(X)) = 1$ となる f を一様 Kurtz テストと呼ぶ．すべての一様 Kurtz テスト f に対して $B \in f(A)$ である時，B は A 一様 Kurtz ランダムであるという.*

独立性定理を示すときには積分テストを使った特徴付けが便利である．宮部 [5] と同じ方法で以下を示すことができる.

定理 2.4 (宮部)**.** *$A, B \in 2^\omega$ に関して以下は同値.*

1. *B は A 一様 Kurtz ランダム.*
2. *拡張計算可能関数 $t : 2^\omega \times 2^\omega \to \overline{\mathbb{R}}^+$ ですべての X に対して $\int t(X, Y) d\mu(Y) = 1$ となるようなすべての t に対して，$t(A, B) < \infty$.*

これを使って以下を示すことができる.

定理 2.5 (宮部)**.** *$A \oplus B$ が Kurtz ランダム $\iff$ A が Kurtz ランダムかつ B が A 一様 Kurtz ランダム.*

参考文献

[1] G. Barmpalias, J. S. Miller, and A. Nies. Randomness notions and partial relativization. *Israel Journal of Mathematics*, pages 1–26, 2011.

[2] D. Diamondstone, N. Greenberg, and D. Turetsky. A van lambalgen theorem for demuth randomness. Submitted.

[3] J. Franklin and F. Stephan. Van Lambalgen's Theorem and high degrees. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 52(2):173–185, 2010.

[4] S. A. Kurtz. *Randomness and Genericity in the Degrees of Unsolvability.* PhD thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1981.

[5] K. Miyabe. Characterization of Kurtz randomness by a differentiation theorem. To appear in Theory of Computing Systems.

[6] K. Miyabe. Truth-table Schnorr randomness and truth-table reducible randomness. *Mathematical Logic Quarterly*, 57(3):323–338, 2011.

[7] K. Miyabe and J. Rute. Van Lambalgen's Theorem for uniformly relative Schnorr and computable randomness. Submitted.

[8] M. van Lambalgen. *Random sequences.* PhD thesis, University of Amsterdam, 1987.