

確率概念の捉え方

東京大学 蓮尾研セミナー

2013年4月23日

宮部賢志

学振PD (東京大学情報理工学系研究科)

ゲームは楽しい

大数の法則

~~~~~

- ❖ 「公平なコインを無限回投げると、  
その表と裏の相対頻度は、 $1/2$ に近づく」  
と信じることができる



# 公理的確率論による定式化

~~~~~

定理

$\{X_n\}$ を $P(\{0\}) = P(\{1\}) = 1/2$ となる独立同分布の確率変数列とすると、ほとんど確実に

$$\lim_n \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n} = 1/2$$

が成り立つ。すなわちそのような列の測度は 1 である。

基本的な定理だが. . .

~~~~~

- ❖ 確率論の講義ではかなり後の方で出てくる  
(可測集合, 測度空間, 可測関数, などの  
定義)
- ❖ 条件 (公平, 独立) は厳しいのでは?



# FAIR-COIN GAME

**Players:** Skeptic, Reality

**Protocol:**

$$\mathcal{K}_0 := 1.$$

FOR  $n = 1, 2, \dots$ :

Skeptic announces  $M_n \in \mathbb{R}$ .

Reality announces  $x_n \in \{0, 1\}$ .

$$\mathcal{K}_n := \mathcal{K}_{n-1} + M_n(x_n - \tfrac{1}{2}).$$

**Collateral Duties:** Skeptic must keep  $\mathcal{K}_n$  non-negative.

Reality must keep  $\mathcal{K}_n$  from tending to infinity.

# ゲーム論的確率論による定式化

~~~~~

定理

Skeptic は以下の事象を強制できる.

$$\lim_n \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} = \frac{1}{2}.$$

.

特徴

[illegible]

- ❖ 独立の仮定も公平の仮定もいらない
- ❖ 実際に行われているマネーゲームそのまま
(のように見える)
- ❖ ゲームの必勝戦略を考える (楽しい！)
ことがそのまま証明になる

根本的な疑問

❖ なぜこれが「大数の法則の証明」になるのか？

哲学と歴史を少し

そもそも確率とは

- ❖ 傾向説
- ❖ 頻度説
- ❖ 主観説

傾向説を作った人

- ❖ アルノー，ベルヌーイ
- ❖ ヒルベルト，コルモゴロフ
- ❖ ポパー（1934），ミラー，フェッツァー

数学としての確率論の始まり

~~~~~

- ❖ Pascal と Fermat の往復書簡(1654)
- ❖ 掛け金の配分問題
- ❖ ランダム の概念をどう捉えているか？

[illegible]

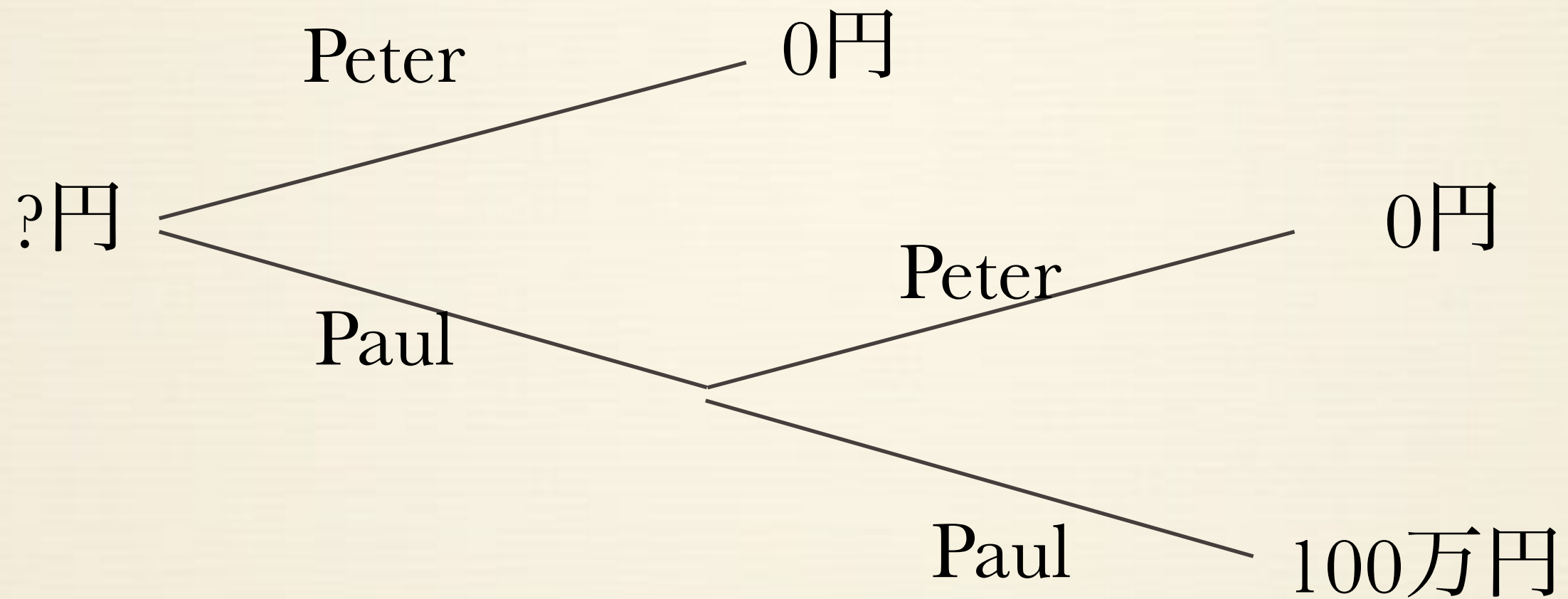
- 
- A black and white portrait of John Locke, an English philosopher, physician, and scientist. He is shown from the chest up, wearing a dark, draped garment over a white shirt with a high collar. He has long, wavy hair and is looking slightly to the right of the viewer.



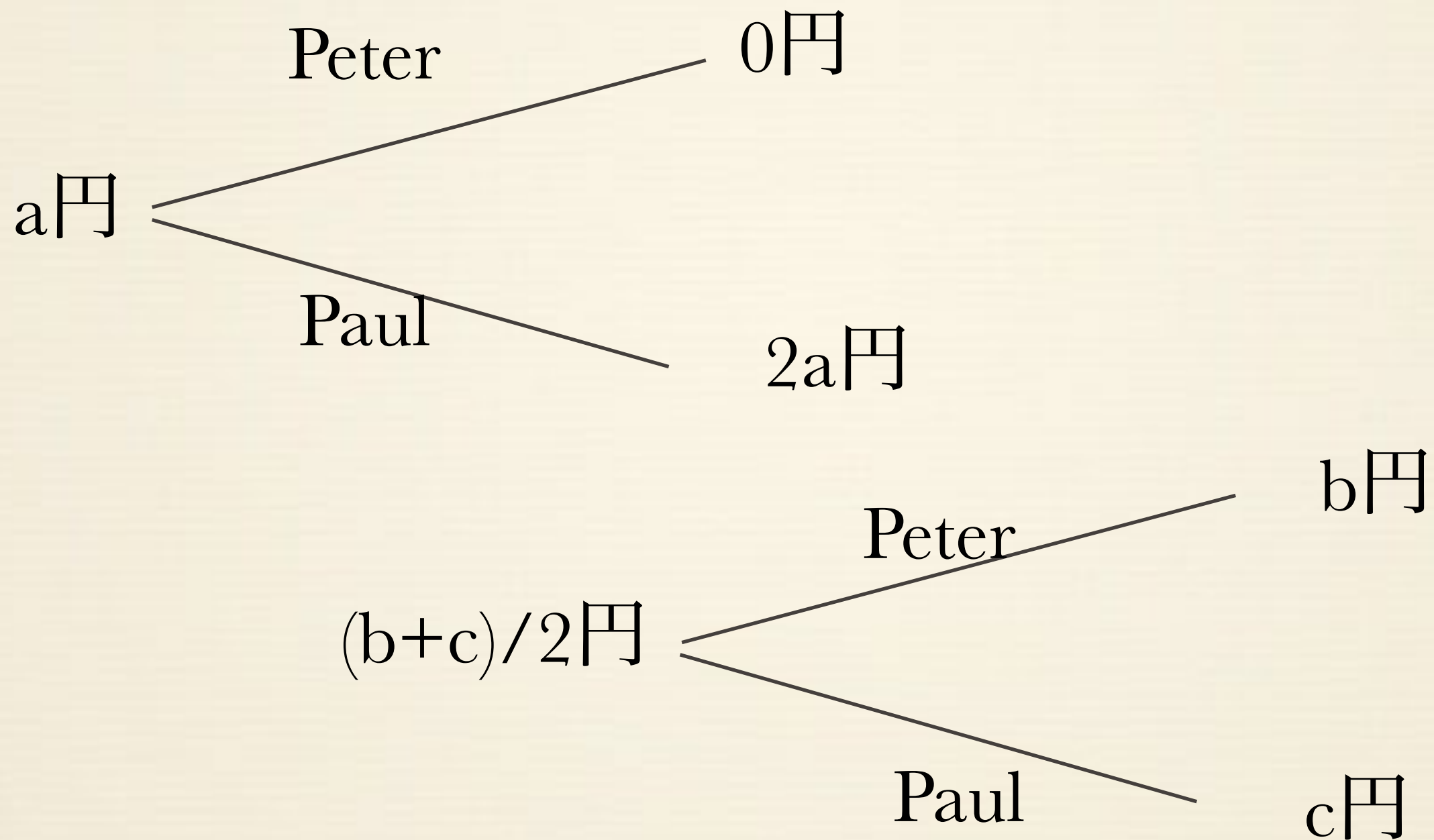
**XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX**

- 15

# Pascalの方法(2/4)



# Pascalの方法(3/4)





[illegible]

.....

- ❖ 「同じ条件で争うことが公平である」  
という原理
- ❖ von Mises, マルチンゲール,  
ゲーム論的確率論, などの流れの大元

[illegible]

- 
- A portrait of John Locke, an English philosopher, with long, wavy, light-colored hair, wearing a dark garment with a prominent white collar.



# Fermatの方法

~~~~~

- ❖ 決まった回数だけプレイを続けるものと想像しよう
- ❖ 組み合わせの数によって配分
- ❖ 非常に楽！
- ❖ 公理主義的確率論に似ている？

確率概念の始まり

確率概念の始まり

- ❖ Arnauld (1612-1694)
- ❖ “The Port-Royal Logic”
- ❖ Pascalと交流があった



確率概念の始まり

確率論の発展と確率論の発展

- ❖ 「10人の人が各人1クラウン賭けるゲームがあり、彼らのうちの一人だけが買って全部をせしめ、他の人々が皆失うとしよう。（中略）彼が1クラウン失い、9クラウンを得ないのは、各々の場合9倍も確からしい。」 “The Port-Royal Logic”
- ❖ G. Shafer (1978) “Non-additive Probabilities in the Work of Bernoulli and Lambert”
- ❖ I. Hacking (1975) “The Emergence of Probability”

論理の順番が逆

確率論の基礎からゲーム理論まで

- ❖ 確率が与えられる
=>大数の法則などの性質を示す
- ❖ ゲームのルールを定める
(大数の法則などの性質が含まれる)
=>確率を求める

直感を大切に

予測不可能とは

~~~~~

2 進無限列が予測不可能とは、  
次のようなゲームで勝利できないことである。

- 最初に 1 円持っている。
- 次の値が  $-1$  か  $1$  かにお金を賭ける。
- 当たったら 2 倍になる。
- はずれたら没収される。
- 所持金の  $\sup$  が無限大になれば勝利。

•



# 定式化

~~~~~

$$\mathcal{K}_0 := 1.$$

$n = 1, 2, \dots$ に対して, :

プレイヤーは $M_n \in \mathbb{R}$ を宣言.

$x_n \in \{-1, 1\}$ が提示される.

$$\mathcal{K}_n := \mathcal{K}_{n-1} + M_n x_n.$$

プレイヤーは $\mathcal{K}_n$ を非負に保つ必要がある.

$\sup_n \mathcal{K}_n = \infty$ の時, プレイヤーが勝利する.

このゲームにおいて, プレイヤーはほとんど確実に敗北する.

プレイヤーが2人に

プレイヤー: Skeptic, Reality

プロトコル: $\mathcal{K}_0 := 1$.

$n = 1, 2, \dots$ に対して, :

Skeptic は $M_n \in \mathbb{R}$ を宣言.

Reality は $x_n \in \{-1, 1\}$ を提示.

$$\mathcal{K}_n := \mathcal{K}_{n-1} + M_n x_n.$$

Skeptic は $\mathcal{K}_n$ を非負に保つ必要がある.

$\sup_n \mathcal{K}_n = \infty$ の時, Skeptic が勝利する.

このゲームにおいて, Skeptic はほとんど確実に敗北する.

示したいことは何か？

- ❖ 確率論の目的は何か？
- ❖ どんな振る舞いが
「ほとんど確実に」起こるか？
- ❖ 例えば、大数の法則を証明できるか？

勝利条件の変更

~~~~~

## 付帯義務

Skeptic は  $\mathcal{K}_n$  を非負に保つ必要がある.

Reality は  $\sup_n \mathcal{K}_n < \infty$  を保つ必要がある.

## 勝利条件

$S_n/n \rightarrow 0$  となれば, Skeptic の勝利.

## 課題

Skeptic の勝利戦略を見つけよ！

.

# 言い換えると

Skeptic の勝利戦略がある

⇒ イベント  $E$  または  $\sup_n K_n = \infty$  が起こる.

⇒ ほとんど確実に  $\sup_n K_n < \infty$  が起こるから,

それと同じぐらい  $E$  が起こると信じることができる.

Reality に勝利戦略がある

⇒  $\sup_n K_n < \infty$  かつ  $E$  でない  $\{x_n\}$  を選べる.

⇒ 「ほとんど確実に  $E$  が起こる」とは信じることができない.

完全情報ゲームなので, ほとんどの場合 (quasi-Borel) にどちらかに勝利戦略がある.



# 大数の法則

## 定義

ある Skeptic の戦略  $S$  のもとで、 $E$  または  $\lim_n K_n = \infty$  となるとき、 $S$  は  $E$  を強制するという。

## 定理

上記のプロトコルにおいて、Skeptic は  $S_n/n \rightarrow 0$  を強制できる。

## 定義

$E$  がほとんど確実に起こるとは  $S$  が  $E$  を強制できることを言う。



# どうやって戦略を作る？

~~~~~

- ❖ 相対頻度が $1/2$ に収束しないとしよう
- ❖ $1/2+e$ よりも大きくなる所が無限回ある
- ❖ 自分の所持金を $1/2+e$ と $1/2-e$ に分配すると所持金が無限大になる
- ❖ 可算個の e について和を取る

補題

$\epsilon > 0$ とする. このとき Skeptic は以下の事象を弱強制できる.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \leq \epsilon.$$

.

証明

初期資金を 1 とする. α を現在資金として, 常に $\epsilon\alpha$ だけチケットを買うと, ラウンド n での資金は,

$$\prod_{i=1}^n (1 + \epsilon x_i).$$

これが有限だから

$$D \geq \sum_{i=1}^n \ln(1 + \epsilon x_i) \geq \epsilon \sum_{i=1}^n x_i - \epsilon^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \epsilon \sum_{i=1}^n x_i - \epsilon n^2,$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \leq \frac{D}{\epsilon n} + \epsilon.$$

補題

Skeptic が E を弱強制できれば, E を強制できる.

補題

Skeptic が $E_1, E_2, \dots$ を弱強制できれば, $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ を弱強制できる.

不可能性を捉える

できることを定める

- ❖ 確率論 $\Rightarrow$ 可測
- ❖ ランダムネスの理論 $\Rightarrow$ 計算可能性
- ❖ 暗号 $\Rightarrow$ 計算量
- ❖ ゲーム論的確率論 $\Rightarrow$ プロトコル

プレイヤー: Forecaster, Skeptic, Reality

プロトコル: $\mathcal{K}_0 := 1$.

$n = 1, 2, \dots$ に対して, :

Forecaster は $m_n \in \mathbb{R}$ と $v_n \geq 0$ を宣言.

Skeptic は $M_n \in \mathbb{R}$ と $V_n \geq 0$ を宣言.

Reality は $x_n \in \mathbb{R}$ を提示.

$$\mathcal{K}_n := \mathcal{K}_{n-1} + M_n(x_n - m_n) + V_n((x_n - m_n)^2 - v_n).$$

Skeptic は $\mathcal{K}_n$ を非負に保つ必要がある.

$\lim_n \mathcal{K}_n = \infty$ の時, Skeptic が勝利する.

パラメータ: 可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$

プレイヤー: Forecaster, Skeptic, Reality

プロトコル:

$$\mathcal{K}_0 := 1.$$

$n = 1, 2, \dots$ に対して, :

Forecaster は $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度 p_n を宣言.

Skeptic は p_n に関する f_n の期待値 $\int_{\Omega} f_n dp_n$ が存在するような, Ω 上の可測関数 f_n を宣言.

Reality は $x_n \in \Omega$ を提示.

$$\mathcal{K}_n := \mathcal{K}_{n-1} + f_n(x_n) - \int_{\Omega} f_n dp_n.$$

上確率, 下確率

~~~~~

$$\overline{\mathbb{P}}(E) := \inf \{ \epsilon > 0 : (\exists S) \sup \mathcal{K}_n^S(w_0 \cdots w_n) \geq 1/\epsilon \\ \text{for all } w_1 w_2 \cdots \in E \},$$

$$\underline{\mathbb{P}}(E) := 1 - \overline{\mathbb{P}}(E^c).$$

.



# Kolmogorov 0-1 law

~~~~~

定義

$\{X_n\}$ を独立確率変数列として, E が **tail event** であるとは,
 $\{X_n\}$ の有限部分列に依存しない事象を言う.

定理

E が tail event ならば, $P(E) = 1$ もしくは $P(E) = 0$

ゲーム論的確率論版

~~~~~

定理 (Takemura-Vovk-Shafer 2008)

プロトコルがある条件を満たし,  $E$  をその tail event とする.  
このとき, 次のうちどれかが成り立つ.

1.  $\underline{\mathbb{P}}(E) = 1$  certain.
2.  $\overline{\mathbb{P}}(E) = 0$  impossible.
3.  $\overline{\mathbb{P}}(E) = 1, \underline{\mathbb{P}}(E) = 0$ , fully uncertain.



# fully uncertain tail event

プレイヤー: Skeptic, Reality

プロトコル:

$$\mathcal{K}_0 := 1.$$

$n = 1, 2, \dots$  に対して, :

Skeptic は  $M_n \in \mathbb{R}$  を宣言.

Reality は  $x_n \in \mathbb{R}$  を提示.

$$\mathcal{K}_n := \mathcal{K}_{n-1} + M_n x_n.$$

$E$ : 有限個の  $n$  を除いて  $x_n = 0$ , tail event

$$\overline{\mathbb{P}}(E) = 1, \underline{\mathbb{P}}(E) = 0.$$



ランダムに振る舞う

---

# カジノ

~~~~~

プレイヤー: Player, Casino

プロトコル: $\mathcal{K}_0 := 1$.

$n = 1, 2, \dots$ に対して, :

Player が $M_n \in \mathbb{R}$ を宣言.

Casino は $x_n \in \{-1, 1\}$ を提示.

$$\mathcal{K}_n := \mathcal{K}_{n-1} + M_n x_n.$$

Player は $\mathcal{K}_n$ を非負に保つ必要がある.

$\lim_n \mathcal{K}_n = \infty$ の時, Player が勝利する.

.

よくある考え方

~~~~~

- ❖ Casinoは「ランダムに」振る舞えば,  
Playerが勝つことは無い！
- ❖ しかし, ランダムな列は計算できない
- ❖ 精度の良い疑似乱数を作ろう！！



# Reality側の勝利戦略

---

- ❖ Realityに勝利戦略がある
- ❖ Skepticから見て「ランダムに」振る舞っている（可算個なら同時に可能）
- ❖ ただし、他の人から見て「ランダム」であるとは限らない

プレイヤー: Forecaster, Skeptic, REality

プロトコル:  $\mathcal{K}_0 := 1$ .

$n = 1, 2, \dots$  に対して, :

Forecaster は  $m_n \in \mathbb{R}$  と  $v_n \geq 0$  を宣言.

Skeptic は  $M_n \in \mathbb{R}$  と  $V_n \geq 0$  を宣言.

Reality は  $x_n \in \mathbb{R}$  を提示.

$$\mathcal{K}_n := \mathcal{K}_{n-1} + M_n(x_n - m_n) + V_n((x_n - m_n)^2 - v_n).$$

Skeptic は  $\mathcal{K}_n$  を非負に保つ必要がある.

$\lim_n \mathcal{K}_n = \infty$  の時, Skeptic が勝利する.



定理

Skeptic は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n^2} < \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_i) = 0$$

を強制できる. Reality は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n^2} = \infty \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_i) \text{ は } 0 \text{ に収束しない}$$

を順守できる.



# 証明方法

---

- ❖ (Shafer-Vovk 2001)  
Randomized Strategy + Martinの定理
- ❖ (Vovk 2013)  
Deterministic Strategy
- ❖ (M.-Takemura 2012, M. 20xx)  
Randomized StrategyからDeterministic  
Strategyへの構成

# 条件なし

~~~~~

定義

ゲームが **coherent** であるとは, Skeptic に Reality の手によらず常に儲けるような戦略が存在しないことをいう.

命題

ゲームが coherent ならば, Reality は $\mathcal{K}_{n+1} \leq \mathcal{K}_n$ となるような手がある.

命題 (M.-Takemura 2012)

Skeptic が E を強制できるなら, Reality は E を順守できる.

証明概略

E を強制するための戦略を P とし, Skeptic が実際に使う戦略を S とする.

$(S + P)/2$ も戦略であり, これに対して Reality は資金が無限大に発散しないように動く.

このとき, P を使った戦略も資金は有限で, P は E を強制するから, Reality の動きは E を満たす.

S を使った戦略も資金は有限である.