積分テストに対する Lebesgue点の特徴付け

日本数学会2014年度年会@学習院大学

2014年3月15日(土)

宮部賢志（Kenshi Miyabe）

学振PD・東京大学

定理 (Lebesgue 1904)

すべての非減少関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ は至る所微分可能

定理 (Brattka-Miller-Nies 20xx)

実数 $x \in [0,1]$ に関して以下は同値.

(i) x は計算可能ランダム.

(ii) すべての計算可能な非減少関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ は x で微分可能.

ランダムの概念	関数族
弱2ランダム	至る所微分可能 (Brattka-Miller-Nies)
Martin-Löfランダム	有界変動 (Demuth 1976, BMN)
計算可能ランダム	非減少 (BMN) or Lipschitz (Freer-Kjos-Hanssen-Nies-Stephan)

定理 (Lebesgue 1910)

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ を積分可能な関数とする．この時，至る所，

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,\epsilon))} \int_{B(x,\epsilon)} f \, d\lambda = f(x)$$

が成立する．ただし，λ は Lebesgue 測度とする．

　このような点 x を f の Lebesgue 点と呼ぶ．f として $\{0,1\}$ 値関数を考えれば，系として Lebesgue 密度定理が得られる．これから，この定理の実効化を見てゆこう．

ランダムの概念	関数族
?	積分テスト
Martin-Löfランダムネス	?
Schnorrランダムネス	L^1計算可能 (Pathak-Rojas-Simpson)
Kurtzランダムネス	ほとんど至る所計算可能 (M. 2013)

密度ランダムネス

(Density randomness)

定理 (M.)

$z \in [0,1]$ に関して以下は同値:

(i) z は密度ランダム.

(ii) すべての積分テストに対して z は Lebesgue 点となる.

定義

積分テストとは，積分可能な下側半計算可能関数 $f : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}^{+}$ のことをいう．

定理

実数 $z \in [0,1]$ が ML ランダムであることと，すべての積分テスト f に対し $f(z)$ が有限であること，は同値．

定義

族 $C \subseteq \mathbb{R}$ の点 z での**密度**を,

$$\rho(C|z) = \liminf_{\gamma,\delta \to 0^+} \frac{\lambda([z-\gamma, z+\delta] \cap C)}{\gamma + \delta}$$

により定義する.

定理 (Lebesgue 密度定理)

C を可測な集合とすると, ほとんどすべての z に対して, $z \in C$ ならば $\rho(C|z) = 1$.

定義

実数 $z \in [0,1]$ が，ML ランダムで，z を含むすべての Π^0_1 クラスが z で密度 1 であるとき，z は密度ランダムであるという．

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ を積分可能な関数とする．実数 x が f の Lebesgue 点であるとは,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,\epsilon))} \int_{B(x,\epsilon)} f \, d\lambda = f(x)$$

を満たすことを言う．x が f の 2 進 Lebesgue 点であるとは,

$$\lim_{n \to 0} \frac{1}{\lambda([x \upharpoonright n])} \int_{[x \upharpoonright n]} f \, d\lambda = f(x)$$

を満たすことを言う．もし，左辺が収束するなら，x は (2 進) 弱 Lebesgue 点であるという．

定理 (Andrews, Cai, Diamondstone, Lempp and Miller)

z が密度ランダムであることと，すべての左 c.e. マルチンゲールが z で収束すること，と同値である．

補題 (M.)

ML ランダムな実数 z が積分テスト f の 2 進弱 Lebesgue 点ならば, z は 2 進 Lebesgue 点である.

$$D(f,\sigma) = \frac{1}{2^{-|\sigma|}} \int_{[\sigma]} f \; d\mu.$$

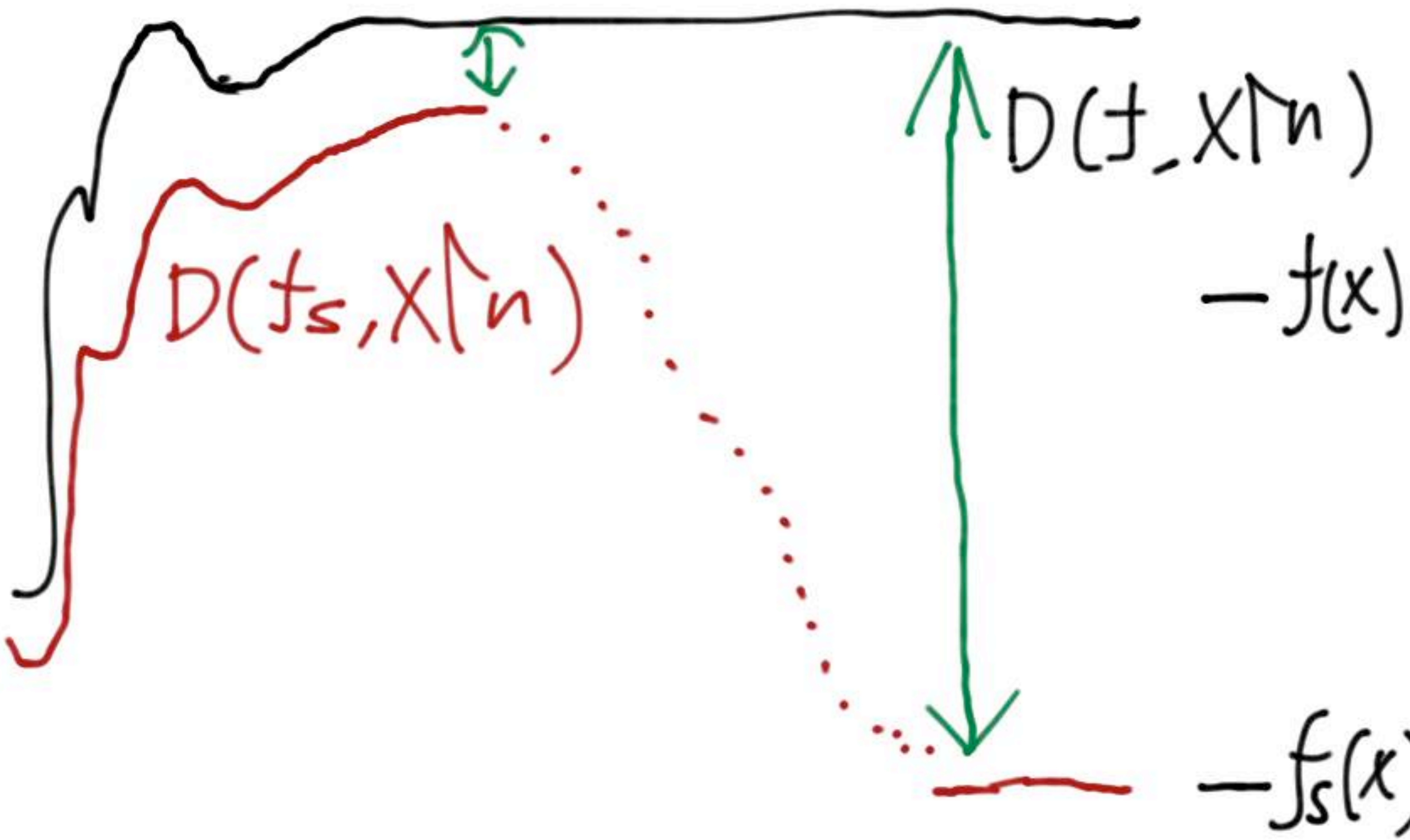
とおく．f が積分テストならば，$D(f,-)$ は左 c.e. マルチンゲールとなる．

$D(f, x \upharpoonright n)$

$f(x)$

$D(f_s, x \upharpoonright n)$

$\to f_s(x)$



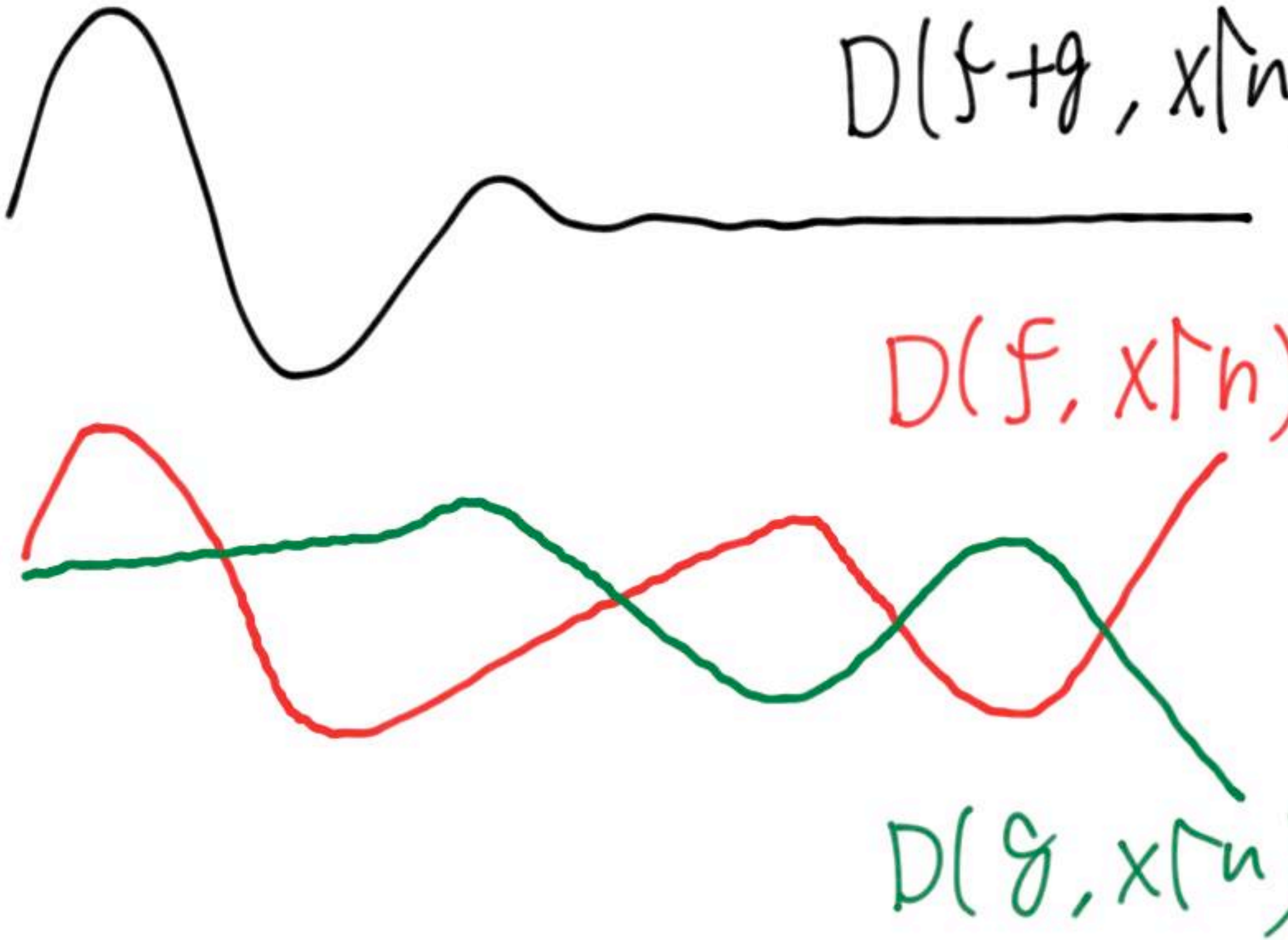
D(f, X↾n)
D(f_s, X↾n)
− f(x)
− f_s(x)

定理 (M.)

以下を満たすような積分テスト f が存在する: x が密度ランダムであることと，x は f の Lebesgue 点であることは同値.

補題

f, g を積分テストとする．x が $f + g$ の 2 進弱 Lebesgue 点ならば，x は f と g の 2 進弱 Lebesgue 点である．


D(f+g, x↾n)
D(f, x↾n)
D(g, x↾n)

今後

- 本結果は，Solomonoffのuniversal inductionの収束問題に深い関係がある．予測問題の文脈では収束速度に興味がある．
- 実数から収束先という関数の性質を，計算可能解析の観点から明らかにする．