賭けのゲームと数学

宮部賢志

明治大学サマーセミナー　理工学部数学科

2014年8月18日(月)

確率って何？

確率という言葉

- 明日の降水確率は．．．
- 宝くじで一等が当たる確率は，車で事故に遇う確率に比べて．．．
- 宇宙人がいる確率は．．．
- あなたがこの大学に合格する確率は．．．

いろいろな確率

- 「同等に確からしい」に基づく古典確率

  1814年ラプラスの『確率の哲学的試論』による

  小中高等学校で習う確率

- 公理的確率

  1933年コルモゴロフの『確率論の基礎概念』による

  大学で習う（べき）確率

確率の解釈

- フォン・ミーゼスらによる頻度説
- ラムゼイ，デ・フィネッティによる主観説
- ポパーによる傾向説

頻度説とは

- 確率とは試行を繰り返したときの,
  ある現象の相対頻度の極限のこと

- 本当にある値に収束するか？
  どのくらいの速さで収束するのか？
  実験してみましょう.

実験手順

- サイコロをみんなで投げましょう.
  ノルマは1人100回.

- 3つのグループに分けます.

- サイコロの出た目を紙に書いて,
  グループごとにパソコンに入力して下さい.

分かったこと

- 3以下の目が出る相対頻度は0.5に近づいているように見える
- 近づいていく速度も毎回だいたい同じように見える

定理 (ベルヌーイ測度に対する大数の強法則; ボレル 1909)

確率 p で A が起こる試行を n 回行った時，A が起こった回数を r_n としよう．このとき，確率 1 で，

$$\lim_{n \to \infty} \frac{r_n}{n} = p$$

が成り立つ．

定理 (ヒンチンの重複対数の法則 1924)

確率 $\frac{1}{2}$ で A が起こる試行を n 回行った時，A が起こった回数を r_n としよう．このとき，確率 1 で，

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\frac{r_n}{n} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{\ln\ln n}{n}}} = 1$$

が成り立つ．

儲かったのは実力か？

ギャンブル

- 賭博（とばく）とも言う
- 競馬，競艇，競輪，スポーツ振興くじ，宝くじ
- パチンコ，麻雀，カジノ
- 株，為替，先物

依存症

- 確率的に起こったことなのか,
  実力で起こったことなのか，の判別がつきにくい

- 買った時は実力だと思い,
  負けた時は運が悪かったと思う

- 確率的にどんな現象が起こるのかを正しく知ろう

ゲームのルール

- さいころが3以下か4以上かを予想するゲーム
  （勝っても負けても実力だと思う人はいない！）
- 最初に100万円持っている
- 賭けた金額分，金額が上下する
- ただし，借金はできない．0円未満になる可能性があるようには賭けることができない．

6つの賭け方

- どちらかに毎回一定額（10万円）を賭け続ける
- どちらかに毎回一定割合（0.1）を賭け続ける
- 一定額（1万円）からスタートし，負けた場合は金額を倍にする（マルチンゲール）
- 一定額（1万円）からスタートし，負けた場合は一定額を上乗せする（ダランベール）

一定額

- 最初の金額よりも大きくなるか，小さくなるかは，基本的には，それぞれ確率1/2である
- 長く続けていると，0円を下回り，破産する
- ランダムウォーク

一定割合

- 破産することはない
- 低い確率で大きく勝つが,
  高い確率で小さく負ける
- 長く続けていると，ほとんど確実に0円に収束する
- 割合ごとに適切な回数が存在する

マルチンゲール・ダランベール

- 高い確率で小さく勝つが,
  低い確率で破産する
- 長く続けていると，ほとんど確実に破産する
- ダランベールのほうが金額の動きがなめらか

分かったこと

- 一定の割合で勝つことができる
- 長く続ければほとんど確実に破産する

還元率

- オンラインカジノ　97%
- ブックメーカー（スポーツ）　94%
- パチンコ　80%
- 競馬・競輪　75%
- 宝くじ・ロト６　45%

ランダムとは何か？

ランダム再生

- 音楽のランダム再生を使ってみたが,
  どうもランダムではないように見える
- どういうことがあれば,
  「ランダムではない」と言えるだろうか
- どういうことがあれば,
  「ランダムである」と言えるだろうか

例えば

- 同じアルバムから繰り返し表れない
- 同じアーティストが続かない
- ジャンルの相対頻度が適切な値に収束する

分かること

- 「ランダムではない」「ランダムである」と判断することはできない

言えること

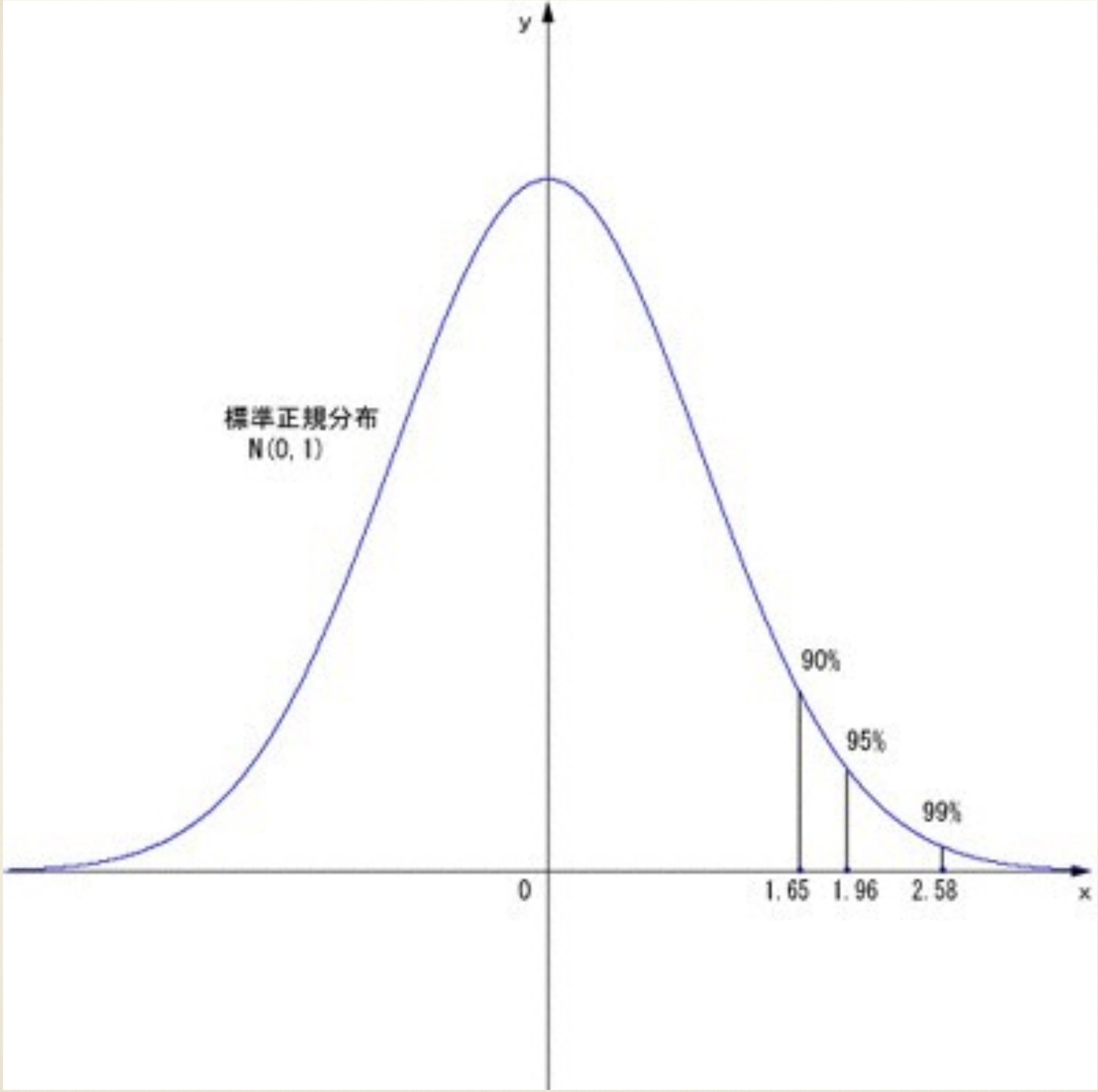
- 「高い確率でランダムではなさそうだ」ということを数字で表すことができる

定理 (中心極限定理)

さいころを n 回振って，$a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ が出た回数を X_n とする．

$$Y = \frac{X_n - \frac{n}{6}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}}$$

を考えると，n が大きい時，標準正規分布に近い．


y
標準正規分布
N(0, 1)
90%
95%
99%
0
1. 65
1. 96
2. 58
x

正しいサイコロであったと仮定する．また 1% の確率での誤りを許すとする．もし，10 回さいころを振って，ある値が 5 回以上出たとすると，

$$Y = \frac{5 - \frac{10}{6}}{\sqrt{10 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}} = 2.828...$$

であるから，正しいサイコロならばそのようなことは滅多になく，このサイコロが正しいという仮説は却下すべきであろう．

ウェルドンのサイコロ

- サイコロを振る回数を増やせば，より精密な検定が行えるようになる．
- 1894年，イギリスの統計学者ウェルドンは，12個のサイコロを26306回振って，5,6の出る確率は0.3377くらいであることを発見した．サイコロの出る目は1/6ずつではない！

まとめ

- 確率概念はややこしい
- 確率概念は便利である
- 数字で表現できるようになると,
  より正確な感覚が得られるようになる