

パラドックスへようこそ

宮部賢志

明治大学サマーセミナー 理工学部数学科

2015年8月17日(月)

「この文章は嘘である」
は正しい文章か？

数学の性質1

■ 証明されたことは、
未来永劫正しい

証明されたことは正しい

- 例えば,
- 「 $1+1=2$ 」は2000年前も1万年後も正しい
- 「三平方の定理（ピタゴラスの定理）」はギリシャでも日本でも正しい
- 微分積分学は発見される前も正しいし、発見された後はずっと使い続けることができる
- 同じ事柄が東洋と西洋で別々に発見されることがあるように、私たちと独立に数学を発展させている宇宙人がいるかもしれない。

学校で習うことも修正される

- 例えば,
- 「日本最古の通貨は富本銭」と習うのは1999年以降.
それ以前は「和同開珎」と習う.
- 高校で習うニュートン力学は,
大学で習う相対論や量子力学によって置き換わる
- 日本人は挨拶するとき頭を下げるが,
西洋人は手を上げる.

1限目のテーマ

- 「正しい」「間違っている」
という感覚を磨こう

ゲーム1のルール

- 声をかけて2人組みになる.
一方が文章を作る.
もう一方は「正しい」「間違っている」を判定する.
- 質問例
「 $1+1=2$ 」
「あなたの着ているシャツは白」
「あなたは平成3年生まれである」

日本語の「ならば」は曖昧

- 「答案用紙は持ち帰ってはいけません」と言われたとき、計算用紙は持ち帰っても良いか？
- 「家に帰ったら休むことができる」とき、家に帰る前には休むことができないか？
- 「怒らないと勉強しない」とき、怒ったら勉強する？
- 「は」や「たら」が「ならば」を意味している
- 法学では反対解釈と類推解釈と呼ばれている

想像上の「ならば」

- 「私が君なら，そんなことはしない」
- 「高校生に戻れたら，一生懸命勉強する」
- これらについては，「真」とか「偽」である
という言い方は普通しない

数学の「ならば」

- 「AならばB」が真であるのは、
「Aが偽であるときか、Bが真であるとき」
- 例えば、
「 $3=1$ ならば $5=7$ 」は正しい文
「(AならばB)または(BならばA)」は正しい文
これをダメットの法則という。
ある人は「双子素数予想が正しいならばAKBは解散する、またはAKBが解散するならば双子素数予想は正しい」と説明している
- これを踏まえてもう一度ゲームを。

ゲーム2のルール

- 声をかけて2人組みになる.
一方が2つの集合を「ならば」でつなく.
もう一方は正しいならば正しいと,
間違っているならば反例を挙げる.
- 質問例
「6の倍数は偶数」は正しい
「 $x^2=1$ ならば $x=1$ 」は間違いで, $x=-1$ が反例
「整数ならば有理数」は?
「 $x^2=-1$ ならば $x=0$ 」は?

数学の「ならば」

- 「ある x が存在して、 $P(x)$ ならばすべての y で $P(y)$ 」
(酒場の法則, drinker's formula)
- ある人がいて、その人が酒を飲んでいるならばすべての人が酒を飲んでいる
- ある人がいて、その人が100点ならばすべての人が100点を取る

自己言及のパラドックス

- 「クレタ人はいつも嘘をつく」
- ピノキオが「僕の鼻が伸びる」と言ったらどうなるか
- 「この文は偽である」
- ベリーのパラドックス
「19文字以内で記述できない最小の自然数」
- 「面白くない最小の自然数」

発展的な話題

- 「ならば」の意味を制限した
直観主義論理, 様相論理, 適切さの論理
- 「証明できない」文の存在を示した不完全性定理

部屋が無限にあるホテルは
満室になるか？

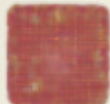
数学の性質2

■ 空想の世界に浸れる

空想の世界

- 実験ができないものについて語る
- 無限小や無限大について語る

2限目のテーマ



無限について
語れるようになろう

無限大とは

- 無限大とは、大きさに限りがないこと。
まずは、「大きさに限りがある」（上限がある）とは
どういうことか。
- 例えば,
- $\{1,2,3\}$ は大きさに限りがある。
なぜならば, 4はこの集合のどの元よりも大きい。
- 偶数の集合には大きさに限りがない。
どの自然数をとっても, それよりも大きな元がある。

ゲーム1のルール

- 自然数の集合 A を考える.
二人組になる.
プレイヤー1は自然数を言う.
プレイヤー2は A の中から自然数を言う.
大きい方の自然数を言った人が勝ち.
プレイヤー1が勝てるなら A の大きさには限度がある.
プレイヤー2が勝てるなら A の大きさには限度がない.
- A として, 100の約数, 奇数, 素数などを考えてみよう

ポイント

- 集合Aが決まれば,
プレイヤー1かプレイヤー2どちらかは必ず勝てる

ゲーム2のルール

- 数列が「無限に大きくなる」とはどういうことか
- 数列 a_n を考える.
二人組みになる.
プレイヤー1は自然数 x を言う.
プレイヤー2は自然数 k を言う.
もし, k よりも大きな n で必ず $a_n > x$ ならプレイヤー2の勝ち
 k よりも大きな n で $a_n \leq x$ となる n があるならプレイヤー1の勝ち
- $a_n = n^2, n(-1)^n, n/(n+1)$ などを考えてみよう.

数とは何か

- 一対一の対応 — 花瓶と花の対応
- 分割による不変 — おはじきを二つの入れ物に
- 順番による不変 — あみだくじ
- ピアジェの実験によると、
これらが理解できるようになるのは、
6,7歳くらいからであるという

数の発見

- 「2日の2と2匹のキジの2とが同じ2であることに気づくまでには限らない年月が必要だった」
(バートランド・ラッセル)
- 数の数え方は民族によって異なる
「1,2,たくさん」
「身体各部分の名前」
オーストラリアは2進法, アフリカは5進法,
フランスは20進法, バビロニアでは60進法,
ダースなどに12進法が残っている

自然数と整数どちらが多いか

- $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$
- $\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$

無限の種類

- 可算無限 — 自然数, 整数, 有理数, 代数的数
- 非可算無限 — $[0,1]$, 実数, 複素数

ヒルベルトの無限ホテル

- あなたは可算無限個の部屋があるホテルの支配人です。
すべての部屋に誰かが泊まっているとします。
- 今、新たに新しい客が来ました。
このホテルは「満室で泊まれない」ということはありません。
どのようにしたら良いでしょうか？
- もっとたくさんの客を連れてホテルの支配人に掛けあって下さい。

選んだドアを変更して
後悔しませんか？

数学の性質3



間違った直感を
修正できる

3限目のテーマ

■ 条件付き確率を
理解する

条件付き確率

A という条件のもとでの, B の確率は,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

例題1

2本の当たりくじと、5本のハズレくじの中から、2人が順番にひく。1人目が当たる確率は $\frac{2}{7}$ 。2人目が当たる確率は

$$\frac{2}{7} \frac{1}{6} + \frac{5}{7} \frac{2}{6} = \frac{2}{7}$$

となって同じ。2人目が当たった時、1人めが当たりの確率は、

$$\frac{\frac{2}{7} \frac{1}{6}}{\frac{2}{7}} = \frac{1}{6}$$

これは1人めが当たりの確率よりも低い。

モンティホール問題

- Monty Hallが司会をつとめるアメリカのテレビ番組で行われた問題
- プレイヤーの前には3つのドアがある。
1つには賞品, 2つにははずれ。
最初にドアを選択したあと,
モンティが残りのドアのうちはずれのドアを開ける。
プレイヤーはドアを変更すべきか?
- チームに分かれて, 実験してみよう。

例題2

- 2人の子供がいる． 少なくとも1人は男の子だと分かっている． この時， この家庭に女の子がいる確率は？
- 2人の子供がいる． 家を尋ねると1人の男の子が顔を出した． もう一人の子が女の子である確率は？

例題3

False Positive Paradox

1 万人に 1 人の割合でかかる病気の検査薬. 病気なのに陰性
と表示される確率は 1%. 病気でないのに陽性と表示される確
率は 5% とする. 今, 陽性の表示だったときに, 病気である確
率は?

A を病気であるという事象. B を陽性表示という事象.

$$P(A) = 10^{-4}, P(B|A) = 1 - 10^{-2}, P(B|\bar{A}) = 5 \cdot 10^{-2}$$

$$P(B) = 10^{-4}(1 - 10^{-2}) + (1 - 10^{-4})5 \cdot 10^{-2} \approx 5 \cdot 10^{-2}$$

$$P(A|B) = \frac{10^{-4}(1 - 10^{-2})}{5 \cdot 10^{-2}} \approx 2 \cdot 10^{-3}$$

まとめ

- 数学の正しさ
- 思考実験の強力さ
- 直感の危うさ