# 3ランダムネスの複雑性による特徴づけ

宮部賢志
明治大学

日本数学会2015年度秋季総合分科会@京都産業大学

2015年9月16日

# ランダムであるとは？

- 予測不可能
  - ー　von Mises，Villeによるマルチンゲール
- 典型的
  - ー　Martin-Löfによる統計的検定
- 圧縮不可能性
  - ー　Kolmogorovによる複雑性

# MLランダムネス

**Theorem** (Levin, Schnorr)

$A \in 2^\omega$ が ML ランダム $\iff$

$$K(A \upharpoonright n) > n - O(1)$$

**Theorem** (Miller-Yu)

$A \in 2^\omega$ が ML ランダム $\iff$

$$C(A \upharpoonright n) > n - K(n) - O(1)$$

# 2ランダム

**Theorem** (Miller)

$A$ が 2 ランダム $\iff$ 無限に多くの $n$ で

$$C(A \upharpoonright n) > n - O(1)$$

**Theorem** (Miller)

$A$ が 2 ランダム $\iff$ 無限に多くの $n$ で

$$K(A \upharpoonright n) > n + K(n) - o(1)$$

# Z-2-ランダム

**Theorem** (M.)

$X$ が $Z$-2-ランダム $\iff$ 無限に多くの $n$ で

$$C(X \upharpoonright (Z \upharpoonright n)) > Z \upharpoonright n - O(1)$$

**Corollary**

$X$ が 3-ランダム $\iff$ 無限に多くの $n$ で

$$C(X \upharpoonright (\Omega \upharpoonright n)) > \Omega \upharpoonright n - O(1)$$

**Theorem** (M.)

$X \oplus Z$ が 2 ランダム $\iff$ 無限に多くの $n$ で,

$$K(X \upharpoonright (Z \upharpoonright n)) > (Z \upharpoonright n) + n + K(n) - O(1).$$

# つまり

- 列Xがどれくらいランダムであるかは,
  複雑性が最大となる桁数の集合の複雑性によって
  測ることができる

# vL-reducibility

**Theorem** (Miller-Yu)

$X \oplus Z$ が ML ランダム $\iff$

$$K(X \upharpoonright (Z \upharpoonright n)) > (Z \upharpoonright n) + n - O(1)$$

**Theorem** (Miller-Yu)

$X \oplus Z$ が ML ランダム $\iff$

$$K(X \upharpoonright n) + C(Z \upharpoonright n) > 2n - O(1)$$

**Theorem** (再掲)

$X$ が $Z$-2-ランダム $\iff$ 無限に多くの $n$ で

$$C(X \upharpoonright (Z \upharpoonright n)) > Z \upharpoonright n - O(1).$$

(証明のアイディア)

$\Rightarrow$ $Z$ から見て 2 ランダムなので，$Z$ で計算可能な桁数部分だけを見てもランダムに見える．

$\Leftarrow$ $X$ の規則を $Z$ の接頭辞を使って見つけることができるのであれば，十分大きい $n$ に対しては $Z \upharpoonright n$ を使って見つけることができる．

.

**Theorem** (再掲)

$X \oplus Z$ が 2 ランダム $\iff$ 無限に多くの $n$ で

$$K(X \upharpoonright (Z \upharpoonright n)) > (Z \upharpoonright n) + n + K(n) - O(1)$$

(証明のアイディア)

$\Rightarrow$ Ample-Excess Lemma より $K(X \upharpoonright (Z \upharpoonright n)) = K(X \widehat{\oplus} Z \upharpoonright (Z \upharpoonright n + n + 1)) \geq Z \upharpoonright n + n + 1 + K^{X \oplus Z}(Z \upharpoonright n + n + 1)$

だが，$K^{X \oplus Z}(Z \upharpoonright n + n + 1) = K^{X \oplus Z}(n)$ であり，$X \oplus Z$ が weakly low for $K$ であることから．

**Theorem** (再掲)

$X \oplus Z$ が 2 ランダム $\iff$ 無限に多くの $n$ で

$$K(X \upharpoonright (Z \upharpoonright n)) > (Z \upharpoonright n) + n + K(n) - O(1)$$

(証明のアイディア)

$\Leftarrow$ $K(X \upharpoonright (Z \upharpoonright n)) < (Z \upharpoonright n) + K(Z \upharpoonright n)$ より $Z$ は 2 ランダム．また上式から $C(X \upharpoonright (Z \upharpoonright n)) > Z \upharpoonright n - O(1)$ i.o. が言えるので，$Z$-2-ランダム．後は van Lambalgen's theorem より．

# まとめ

- Miller-Yuの結果の2ランダムネス版を示した.
- 形はよく似ているが，証明の方針は大きく異なる.