

# ランダムとはどういうことか

宮部賢志

明治大学理工学部数学科

生田サロン@明治大学生田キャンパス

2015年12月18日(金)

# あなたは何をしている？

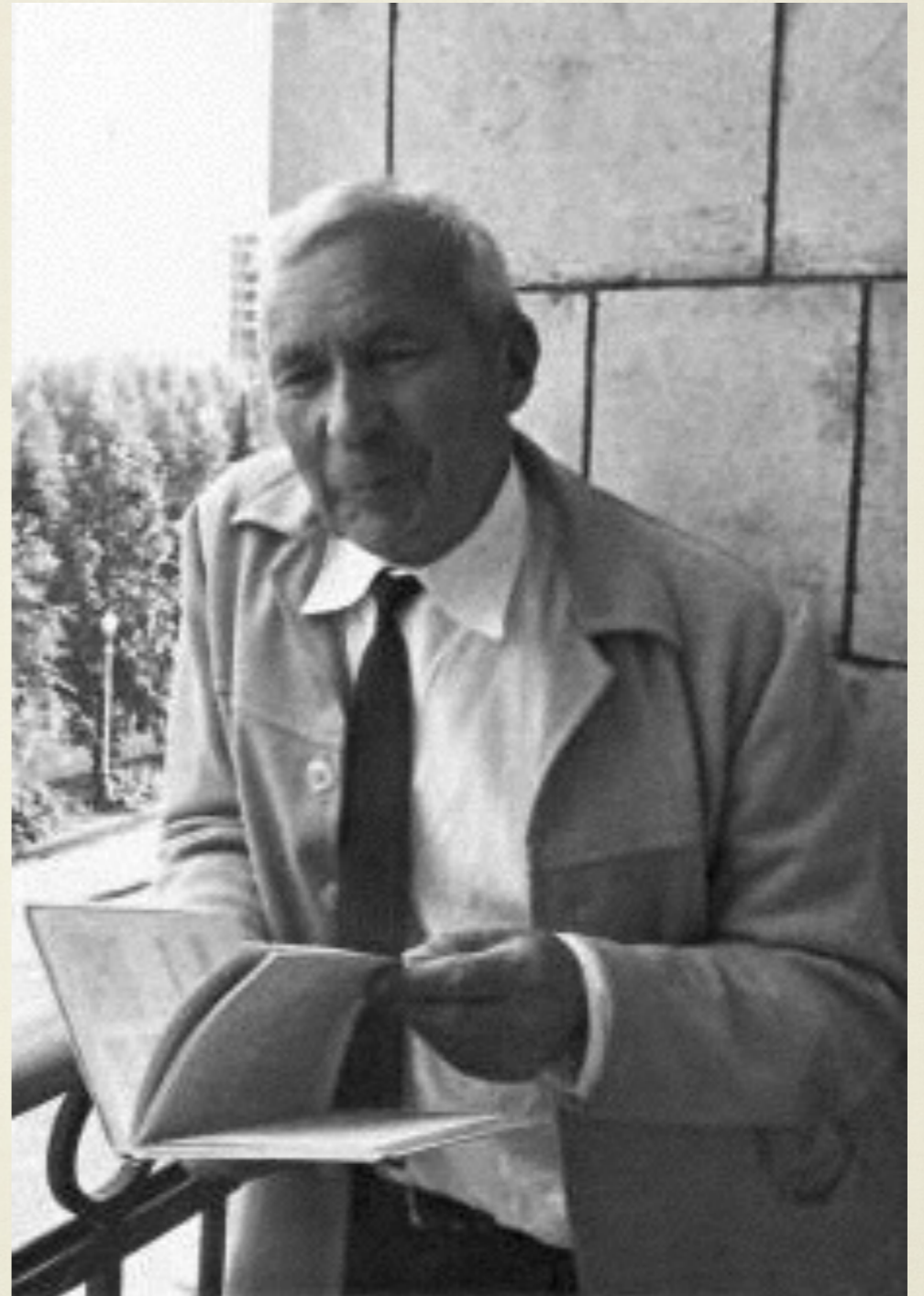
- 確率，ランダム，計算，予測，学習などの概念の数学的定式化を与え，これらの概念の関係性を，数学的に明らかにしている。
- これらはすでに日常でもよく使っていて，「知っている概念」である。  
数学的に調べることにどんな意味があるのか？？

# 確率はよく使われる

- 日常生活：明日の降水確率は・・・
- 統計：95%信頼区間は・・・
- 数理モデル：確率モデルでシミュレーション・・・
- 経済，保険：株価変動のリスクをヘッジするには
- 数学が嫌いな人でもお世話になっている概念

# 現代確率論の基礎づけ

- Andrey Nikolaevich  
Kolmogorov(1903-1987)
- 『確率論の基礎概念』  
(1933年)



# 答えにくい問題

- 確率とは何か？頻度？傾向？信念の度合い？
- 確率0のことは起こるのか？  
コインを投げてずっと表が出ることはあるか？
- モデル選択の基準は？  
様々な情報量基準が使われるのはなぜか？
- => ランダムな概念が抜け落ちているから！

# ランダム概念

- von Misesによるcollectiveの理論 (1919～)
- von MisesとKolmogorovの理論の検討(1930s,40s)
- Kolmogorov, Levin, Schnorrらによる  
ランダムネスの理論の創出(1960s,70s)
- 計算可能解析との融合(2000s)

ランダムを定義する

# 逆さまに考える

- 公理的確率論

確率空間を定義して，サンプル(パス)のランダムな振る舞いを見る

- von Misesのcollectiveによる確率論

ランダムな列(collective)を定義して，そこから確率概念が現れるのを見る



# ランダム=予測不可能

- 賭けゲームを考えて，次が0か1かに賭ける
- 当たれば2倍，外れれば没収
- 初期資金は1円で，いくらでも細かく分割可能
- 借金はできない
- ランダム=どんな戦略に対しても資金が有限

## 定義

$M : \{0, 1\}^* \rightarrow \mathbb{R}$  がマルチンゲールであるとは、任意の  $\sigma \in \{0, 1\}^*$  に対し、

$$M(\sigma) = \frac{M(\sigma 0) + M(\sigma 1)}{2}$$

の公正条件 (fairness-condition) を満たすことを言う。

2 進無限列  $A \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  がランダムであるとは、任意の下側計算可能なマルチンゲール  $M$  に対して、

$$\sup_n M(A \upharpoonright n) < \infty$$

を満たすことを言う。

# ランダムであるとは？

- 予測不可能

- von Mises, Villeによるマルチンゲール

- 典型的

- Martin-Löfによる統計的検定

- 圧縮不可能性

- Kolmogorov複雑性

## 現実の現象

コインを 10000 回投げて表の出た回数を数えるとたぶん 5000 回に近い。

## 確率論による定式化 (大数の法則)

$\{X_i\}$  を  $P(X_i = 0) = P(X_i = 1) = \frac{1}{2}$  である独立同分布の確率変数列とすると, 確率 1 で  $\lim_n \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \frac{1}{2}$

## ランダムネスによる定式化 (大数の法則)

$A \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  が **ML ランダム** ならば,  $\lim_n \frac{\sum_{i=1}^n A(i)}{n} = \frac{1}{2}$

# 見方が変わる

- 大数の法則は，確率現象とは関係がない  
（という見方もできる）
- ランダムであれば成り立つこと  
複雑であるか，典型的であるか，予測不可能  
であれば，成り立つ

# ランダム<sup>ガ</sup>ムの性質

# 独立性定理

## 疑問

2進無限列の偶数番目の列がランダムで、奇数番目の列が偶数番目の列から見てランダムであれば、全体の列としてランダムか？逆は成り立つか？

ML ランダム: Yes (van Lambalgen 1987)

それ以外のランダム: No (2005-2010)

Schnorr ランダム: Yes (M. 2010, with Rute 2013)

Demuth ランダム: Yes (Diamondstone et al. 2013)

Kurtz ランダム: No (M. 2014)

弱 2 ランダム: Yes (M. in preparation)

# ランダム=使えない？

- ランダムな列に情報を埋め込めるか？

Kucera-Gacsの定理 ('85,'86) => MLランダムはできる

Kautz ('91) => 2ランダムはできない

- 計算可能関数で近似可能 ( $L^1$ 計算可能)

= ランダムな入力なら正しい(Schnorr各層計算可能)

+ 積分値が計算可能(Lusinの定理の実効化) (M. 2013)

- 計算量を減らせるか？  $BPP=P$ ?



ランダムを応用する

# ランダムな使い方

- von Mises (1919~) => 確率論の基礎づけ
- Solomonoff (1960s~) => 人工知能
- 2000s~ => エルゴード理論
- 2010s~ => 乱択アルゴリズム, 暗号?

# 学習するとは？

- 現在の学習理論では「学習＝適切なモデルを作る」  
例. ランダムフォレスト, SVM, 深層学習
- データのランダム性を見て確率を求めるプロセス  
＝確率論 (von Mises, Solomonoffのアイデア)  
学習そのもののモデルを作る=>人工汎用知能へ  
計算可能性や計算複雑性との関連は？

# まとめ

- 数学の確率論を現実の現象へ応用しようとする時の基礎は、von Misesによって提唱された確率の頻度説である。(Kolmogorov 1963)
- これはランダムネスの理論誕生前夜の言葉。  
ランダムネスの理論を、現実現象へ応用の基礎とすることはできないか？そのための数学的準備を少しずつ整えているところである。