ランダムと確率の概念について

宮部賢志　明治大学理工学部数学科

第3回量子基礎論懇話会＠慶応大学三田キャンパス

2016年3月12日(土)

要約

- 「Kolmogorvによる公理的確率論により，解釈を離れて様々な応用が可能になった」
=>実は傾向説による確率モデルの枠組みの整備

- von Misesの確率論から始まるランダムネスの理論, ゲーム論的確率論では，データだけが大事
=>科学の営みの数学的モデル？

構成

- von Misesの確率論
- Kolmogorovとランダムネスの理論
- Shafer-Vovkとゲーム論的確率論
- 個人的雑感

- 数学の研究集会での発表や解説記事の執筆では，数学的単純さを優先して，歴史的事実や先人の哲学を矮小化することが多い
- 今回の発表では，多少複雑になってでも，先人の哲学を大切にすることにする

von Misesの確率論

背景

- 1814年Laplace『確率の哲学的試論』
  =>古典的確率論，平等に確からしい

- 1890年代物理的な興味から確率論の再考
  =>1900年Hilbert第6問題

- 確率哲学は未整備であった時代

確率哲学

- 頻度説ー確率とは頻度であるという考え方
- 主観説ー確率とは信念の度合いであるという考え方
- 傾向説ー事象そのものに起こりやすい傾向が存在し，

  その傾向の度合いが確率であるという考え方

von Misesの哲学

- 確率の頻度説

  =>無限回繰り返すことができる事象のみを対象

  =>1回だけの事象の確率は考えない

- First collective, then probability
  =>データが先，確率概念は後

collective

単純のために $2^\omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ を考える．列 $A \in 2^\omega$ が collective であるとは，以下の 2 条件を満たすことを言う：

1. 極限頻度 $\lim_n \frac{\sum_{k=1}^{n} A(k)}{n}$ が存在する．
2. admissible な選択関数に沿った部分列でも極限頻度が変わらない．

注意 von Mises 自身は何が admissible であるかは明示しなかった．Church が計算可能なものとすることを提唱し，Wald によって研究されたため，現在では von-Mises-Wald-Church stochastic と呼ばれている．

長所

- 「確率とは頻度である」という私たちの分かりやすい直感に強く訴えかける
- データが全てなので，確率モデルを想定する必要がない
- 確率・統計に区別がなく統一的に扱える
- 1940年ごろまでは公理的確率論と競っていた

短所

- 複雑である
- 極限頻度は求められない
- 重複対数の法則を満たさない (Ville 1939)

Kolmogorov と
ランダムネスの理論

Kolmogorov

- 頻度論者

  1933年の『確率論の基礎概念』においても，

  彼の公理系が「なぜ頻度説の定式化なのか」を

  説明している（が，苦しい）

Kolmogorov (1963) On tables of random numbers

The set theoretic axioms of the calculus of probability, in formulating which I had the opportunity of playing some part(Kolmogorov, 1950), had solved the majority of formal difficulties in the construction of mathematical apparatus which is useful for a very large number of applications of probabilistic methods, so successfully that the problem of finding the basis of real applications of the results of the mathematical theory of probability became rather secondary to many investigators.

I have already expressed the view [see Kolmogorov (1950), Chapter I] that the basis for the applicability of the results of the mathematical theory of probability to real 'random phenomena' must depend on some form of the frequency concept of probability, the unavoidable nature of which has been established by von Mises in a spirited manner.

統計的仮説検定	ランダムネス
有限列	無限列
独立を仮定する	独立は仮定できない
平均からの乖離を見る	すべての規則を見る
5%	測度0

測度0とは

定理

集合 A は測度 0 を持つ $\iff$ 任意の $\epsilon > 0$ に対してある開集合 O が存在して $A \subseteq O$ かつ $\mu(O) \leq \epsilon$

定義

集合 A は ML-null であるとは，一様 c.e. 開集合の列 $\{U_n\}$ が存在して，すべての n で $A \subseteq U_n$ かつ $\mu(U_n) \leq 2^{-n}$

Cantor空間

2^ω で 2 進無限列の集合を表し,

$$[\sigma] = \{X \in 2^\omega \ : \ \sigma \prec X\}$$

柱状集合 (cylinder set) を開基とする位相を入れた空間を, Cantor 空間と呼ぶ. $\mu(\sigma) = 2^{-|\sigma|}$ により入る測度を fair-coin measure と呼び, 以下この測度を入れる.

開集合は開基の和で表せることに注意して, 開集合 U が c.e. であるとは,

$$U = \bigcup_{\sigma \in S} [\sigma]$$

となる計算可能な集合 S が存在することと定義する.

MLランダムネス

Martin-Löf - 直観主義者

定義 (Martin-Löf 1966)

Martin-Löf 検定 (ML 検定) とは，一様 c.e. 開集合の列 $\{U_n\}$ で，$\mu(U_n) \leq 2^{-n}$ であるものをいう．2 進無限列 $A \in 2^\omega$ が ML 検定 $\{U_n\}$ に合格するとは，$A \notin \bigcap_n U_n$ となることをいう．すべての ML 検定に合格する列を ML ランダムな列という．

基本的性質

定理

ML ランダムな列の集合は測度 1.

証明．ML ランダムでない列の集合は，測度 0 の集合の可算和だから，測度 0.

定理

計算可能な列は ML ランダムではない.

証明．A を計算可能な列として，$U_n = [A \upharpoonright n]$ とすれば，$\{U_n\}$ は ML 検定で，A はこの ML 検定に合格しない.

基本的性質

定理

すべての ML ランダムな列に対して，大数の法則が成立する．

すなわち，A が ML ランダムであれば，

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} A(k)}{n} \to \frac{1}{2} \quad (n \to \infty)$$

証明．確率論における大数の法則の証明の計算可能性を確認すればよい．

3つの特徴付け

- 典型的
- 予測不可能性
- 圧縮不可能性

マルチンゲールは Ville(1939) による von Mises の批判的研究の中で導入された．(その後，Doob により公理的確率論の枠組みにも導入された．)

定義

マルチンゲールとは，関数 $M :\subseteq 2^{<\omega} \to \mathbb{R}$ で，以下の公平条件を満たすものをいう：

$$M(\sigma) = \frac{M(\sigma 0) + M(\sigma 1)}{2}$$

直感的には，賭け戦略における資金過程を表す．

定理 (Schnorr 1971)

$A \in 2^\omega$ が ML ランダムであることと，すべての c.e. マルチンゲール M に対して，

$$\sup_n M(A \upharpoonright n) < \infty$$

であることは同値.

定義 (essentially due to Kolmogorov, Solomonoff)

$\sigma \in 2^{<\omega}$ に対して,

$$K(\sigma) = \min\{|\tau| \ : \ U(\tau) = \sigma\}$$

と定義する．ここで，U は万能 Turing 機械である．

定理 (Levin, Schnorr 1973)

$A \in 2^{\omega}$ が ML ランダムであることと，

$$\exists d \forall n K(A \upharpoonright n) > n - d$$

となることは同値．

万能推論

- 「単純な（圧縮可能な）モデルほど可能性が高い」（オッカムの剃刀の定式化）による予測が（ある意味で）最適であることを示すことができる．（計算可能性という制限があるため，No free lunch定理とは矛盾しない．）

- Solomonoffはこの予測を「アルゴリズム的確率(algorithmic probability)」と呼んでいる．

Shafer-Vovkと
ゲーム論的確率論

確率論に測度は必要か？

- 「”確率とはルベーグ測度である”この言葉ほど確率の数学的本質をついたものはない」（伊藤清）『確率論の基礎』
- 一意性？加法性？=>imprecise probability
- モデルフリー=>ノンパラ，prequential probability
- 物理での確率=>Jaynes?

ゲーム論的確率論入門

$\mathcal{K}_0 = 1$

For $n = 1, 2, \cdots$

Skeptic が $M_n \in \mathbb{R}$ を宣言

Reality が $x_n \in \{0, 1\}$ を宣言

$\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_{n-1} + M_n x_n$

付帯条件

Skeptic は $\mathcal{K}_n \geq 0$ を守る．Reality は $\lim_n \mathcal{K}_n$ とならないようにする．

- Skepticは，確率的な（ランダムな）振る舞いをしているかどうか疑う人．ランダムでなければ，適当な戦略で儲けることができる．

- Realityは，Skepticに儲けさせないように振る舞うので，ランダムな（ように見える）振る舞いをせざるをえない．

ゲーム論的大数の法則

定理

上記のプロトコルにおいて，大数の法則がほとんど確実に成り立つ：

$$\lim_n \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} \to \frac{1}{2} \quad (n \to \infty)$$

定義

ゲーム論的確率論において，ある事象がほとんど確実に成立するとは，Skeptic がその事象を強制できることを言う．すなわち，Skeptic にある戦略が存在して，その戦略のもとでは，Reality はその事象が成立するように動かなければならない，ということ．

注意

- プロトコルを変更することで，条件を変えることもできる（連続時間も可能）
- 同様の手法で重複対数の法則などの多くの極限定理を示すことができる
- 中心極限定理などの弱法則は，「ゲーム論的確率」の定義をすることで定式化および証明可能

重要な注意

- ゲーム論的確率論における極限定理は，
  公理的確率論における適切な確率空間の元での
  極限定理を真に導く．逆は成立しない．
  その意味でゲーム論的確率論の主張の方が強い

- 独立同分布の概念の表現は難しい

個人的雑感

モデルからデータへ

- 数理モデルはこれまでの科学において，大成功を収めてきた考え方である．公理的確率はその範疇にあり，それがゆえに扱いやすく，大きな成功を収めた．

- 統計学から機械学習へという止められない流れがあるように，モデルを離れることで見えてくる現象がある

数理モデル＝プログラム

- 良い数理モデル＝短いプログラム
- 測度である必要はない.
  複素数やヒルベルト空間を使っても良い！
  それが「確率的」であることを意味するものではない！
- 分からない部分を補ってモデルを作る
  ＝＞良いモデルを作り分からない部分を調べる

人口汎用知能

- 理論を作るのは人間か？
- 「理論はできるだけ単純にせよ、だが限度というものはある。」（アインシュタイン）
- 理論は単純にできるか？理論構築の方法として，どんな方法があり得るのか？