三角不等式が成り立たない距離上での 実数の計算可能性について

宮部賢志@明治大学

学期末研究発表会@明治大学 2016年7月28日

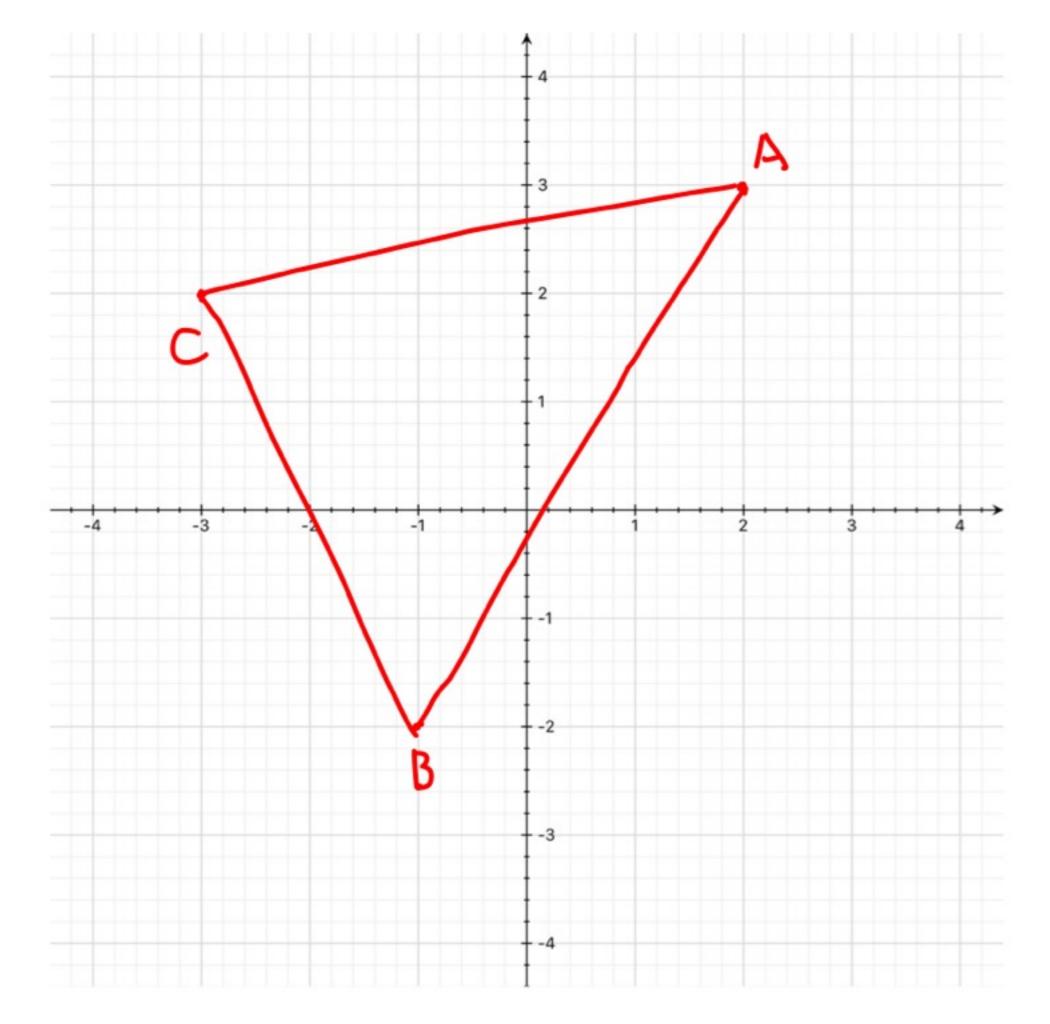
テーマ

- ■実数の近似のしやすさに関する階層を作る
- 近似しやすい<=>計算しやすい
- 近似しにくい<=>ランダム
- ■近似の定義に出てくる距離を変化させることで、 その階層を作る

目次

- 数学(位相)において距離とは何か
- ■実数の計算可能性について
- 三角不等式が成り立たない距離について

距離



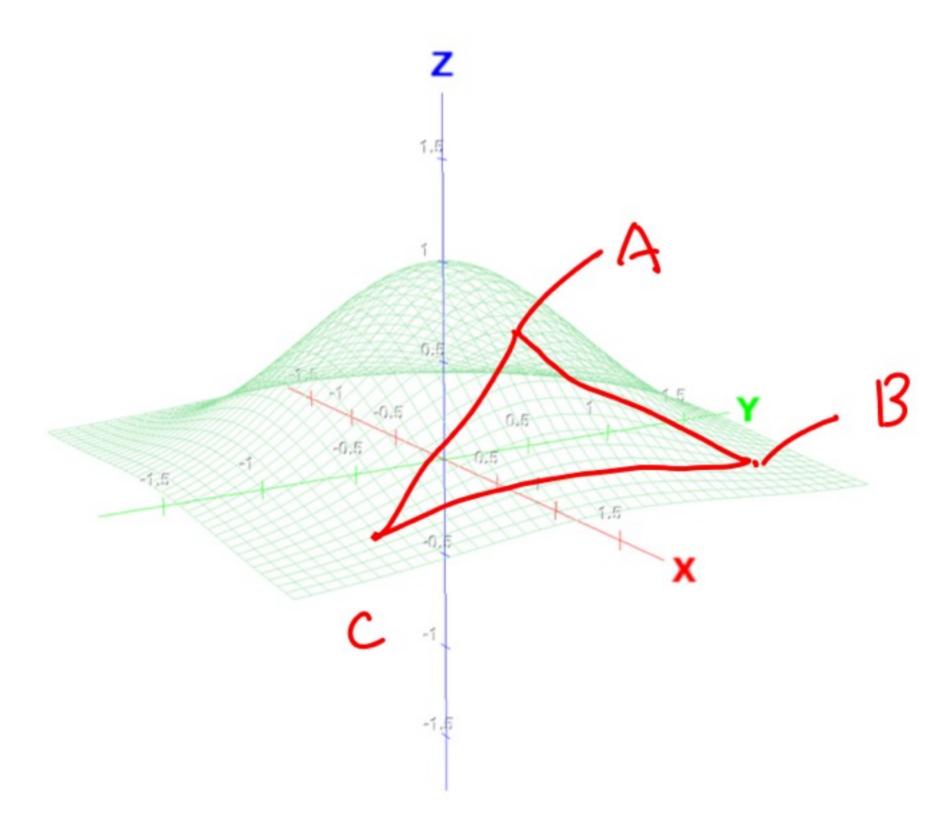
2次元空間上で、2点 (x_0,y_0) と (x_1,y_1) とのユークリッド距離は、

$$\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2}$$

と定義され、3 点 A, B, C について、

$$AB + BC \ge AC$$

が成立する. これを三角不等式と言う.



いろいろな距離

- ■時間的な距離
- ■類似度を測るための距離
- ■心の距離

距離の公理

集合 X 上で定義された 2 変数の実数値関数 $d: X \times X \to \mathbb{R}$ は、以下の条件をみたすとき、距離関数と呼ばれる。任意の $x,y,z \in X$ に対して、

- (i) (非負性) $d(x, y) \ge 0$
- (ii) (非退化) $x = y \iff d(x, y) = 0$
- (iii) (対称性) d(x,y) = d(y,x)
- (iv) (三角不等式) $d(x,y) + d(y,z) \ge d(x,z)$

定義. $p \ge 1$ に対して, $x \in \mathbb{R}^n$ の p-ノルムは,

$$||x||_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)$$

により定義される.

命題. $x, y \in \mathbb{R}$ に対し,

$$d(x,y) = ||x - y||_p$$

とすると, dは距離となる.

証明. 非負性, 非退化, 対称性は明らか. 三角不等式は, Minkowski の不等式,

$$||x + y||_p \le ||x||_p + ||y||_p$$

より成り立つ.

命題. $1 \le p \le q$ のとき,

$$||x||_q \le ||x||_p$$

証明. 一般性を失わず $||x||_p = 1$ として良い.

$$||x||_q^q = \sum |x_i|^q \le \sum |x_i|^p = 1.$$

命題. $1 \le p \le q$ のとき, ある定数 C が存在して,

$$||x||_p \le C||x||_q$$

証明. Hölder の不等式より、 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ のとき、

$$||yz||_1 \le ||y||_a ||z||_b$$

$$y_k = |x_k|^p$$
, $z_k = 1$, $a = \frac{q}{p}$ とおくことで,

$$||x||_p^p = \sum |x_k|^p = ||yz||_1 \le ||y||_a ||z||_b$$

$$= \left(\sum (|x_k|^p)^{q/p}\right)^{p/q} \left(\sum 1\right)^{1-p/q} = ||x||_q^p n^{1-p/q}$$

実数の計算可能性

定義. $x \in \mathbb{R}$ が計算可能であるとは、計算可能な有理数列 $\{r_n\}$ が存在して、すべての $n \in \mathbb{N}$ で

$$|r_{n+1} - r_n| \le 2^{-n}$$

かつ

$$\lim_{n \to \infty} r_n = x$$

となることを言う.

言い換えると

- nを入力として、xのn桁近似の有理数を出力するプログラムが存在する
- 10進少数の列を計算可能
- ■連分数展開が計算可能

具体例

- e, π, √2などは計算可能な実数
- ■整数,有理数,代数的数はすべて計算可能
- ■計算可能な数は可算個しかないので, 計算不可能な数はほとんど至る所存在する.
- ■ランダムな列は計算可能ではない

定義. $x \in \mathbb{R}^d$ が p-計算可能であるとは、計算可能な有理数の組の列 $\{r_n\}$ が存在して、すべての $n \in \mathbb{N}$ で、

$$||r_{n+1} - r_n||_p \le 2^{-n}$$

かつ

$$\lim_{n \to \infty} r_n = x$$

となることを言う.

命題. 任意の $p,q \ge 1$ に対して, $x \in \mathbb{R}^d$ が p-計算可能 $\iff q$ -計算可能

証明. d=1のときには、ノルムが一致するので明らか。

 $p \le q$ と仮定する. $||x||_q \le ||x||_p$ より、p-計算可能であれば q-計算可能. $||x||_p \le C||x||_q$ より、p-計算可能であれば、有理 数列をいくつかずらすことで q-計算可能.

ここまでのまとめ

■ d次元の点の計算可能性は、距離としてpノルムを取れば、どんなpの値に対しても変わらない

距離

定義. $x \in \mathbb{R}$ が弱計算可能であるとは、計算可能な有理数列 $\{r_n\}$ が存在して、

$$\sum_{n} |r_{n+1} - r_n| < \infty$$

かつ

$$\lim_{n} r_n = x$$

となることを言う.

 $\sum_{n} |r_{n+1} - r_n| < \infty$ であれば、コーシー列なので収束することに注意しよう。

具体例

- ■計算可能な列は弱計算可能である
- ■弱計算可能であっても、計算可能とは限らない。 例えば、停止確率など。
- 弱計算可能な数は可算個.
- p/ルムに取り替えても、定数倍しか異ならないので、概念は変わらない

問題. $p \ge 1$ に対して,

$$d(x,y) = |x - y|^p$$

という関数を考える. 計算可能や弱計算可能の概念は変化するか?

動機

- なぜこのような関数を考えるか?
- 一般の測度空間におけるL^p空間を考えて、 その空間での弱計算可能な点における 各点での計算可能性を考えると、 このような関数が出てくる

命題. p > 1 について,d は距離ではない.特に三角不等式を満たさない.

証明. 例としてp=2の場合は,x=0,y=1とすると,

$$d(0,1) = 1^2 = 1$$

だが、

$$d(0, 1/2) = d(1/2, 1) = \frac{1}{4}$$

より,

$$d(0,1) > d(0,1/2) + d(1/2,1)$$

疑問

- ■途中で休憩すると、距離が短くなる。
 そんな距離を考えることに意味があるのか?
- ■古典的には意味はなくても、計算可能性を考慮すると違いが出てくる。

命題. $x \in \mathbb{R}$ が計算可能 $\iff x$ は p-計算可能.

証明. 例としてp=2の場合を示す.

⇒ は明らか.

 $\Leftarrow lt,$

$$|r_{n+1} - r_n|^2 < 2^{-n}$$

であれば, 偶数番目の列を取ることで,

$$|r_{2(n+1)} - r_{2n}| < 2^{-n}$$

とできる.

命題. $x \in \mathbb{R}$ で 2-弱計算可能であるが、弱計算可能でないものが存在する.

証明. 対角線論法により示せる.

階層

- 計算可能(computable)
- 弱計算可能(weakly computable)
- p-弱計算可能(p-weakly computable)
- 発散有界計算可能(divergence bounded computable)
- 計算近似可能(computably approximable)

今後

- 距離としての性質、ノルムとしての性質.
- p-弱計算可能性についての性質. 特に階層はつぶれていないか.
- ■d次元でのMLランダム性との関連について
- L^2空間における計算可能可測関数の階層の特徴付け