#### 三角不等式が成り立たない距離上での 実数の計算可能性について

宮部賢志@明治大学

日本数学会@関西大学 2016年9月18日(日) ■ (修士の学生でも取り組める) プロジェクトテーマの提案

■前提知識:計算可能性理論の基礎を学び、 対角線論法である列を作り、階層の分離を行う 例をいくつか知っていること (停止問題の計算不可能性など。) ■ これから話すテーマは, 問題としてはとても単純で初学者でも取り組める.

■ その半面,私が知る限り知られてはいない内容で, ランダムネスの理論への応用が期待できる.

■自分でもできるが、簡単なことを1つ1つ確認していくという地道な作業になりそう。

他に手がけている論文をまず仕上げたい.

#### テーマ

- ■実数の近似のしやすさの階層について
- 近似しやすい<=>計算しやすい
- 近似しにくい<=>ランダム
- ■近似の定義に出てくる距離を変化させることで、 その階層を作る

定義.  $x \in \mathbb{R}$  が計算可能であるとは、計算可能な有理数列  $\{r_n\}$  が存在して、すべての  $n \in \mathbb{N}$  で

$$|r_{n+1} - r_n| \le 2^{-n}$$

かつ

$$\lim_{n \to \infty} r_n = x$$

となることを言う.

# 言い換えると

- nを入力として、xのn桁近似の有理数を出力するプログラムが存在する
- 10進少数の列を計算可能
- ■連分数展開が計算可能

# 具体例

- e, π, √2などは計算可能な実数
- ■整数,有理数,代数的数はすべて計算可能
- ■計算可能な数は可算個しかないので, 計算不可能な数はほとんど至る所存在する.
- ■ランダムな列は計算可能ではない

定義.  $p \ge 1$  に対して,  $x \in \mathbb{R}^n$  の p-ノルムは,

$$||x||_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)$$

により定義される.

命題.  $x, y \in \mathbb{R}$  に対し,

$$d(x,y) = ||x - y||_p$$

とすると, dは距離となる.

命題.  $1 \le p \le q$  のとき,

$$||x||_q \le ||x||_p$$

証明. 一般性を失わず  $||x||_p = 1$  として良い.

$$||x||_q^q = \sum |x_i|^q \le \sum |x_i|^p = 1.$$

命題.  $1 \le p \le q$  のとき, ある定数 C が存在して,

$$||x||_p \le C||x||_q$$

証明. Hölder の不等式より、 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$  のとき、

$$||yz||_1 \le ||y||_a ||z||_b$$

$$y_k = |x_k|^p$$
,  $z_k = 1$ ,  $a = \frac{q}{p}$  とおくことで,

$$||x||_p^p = \sum |x_k|^p = ||yz||_1 \le ||y||_a ||z||_b$$

$$= \left(\sum (|x_k|^p)^{q/p}\right)^{p/q} \left(\sum 1\right)^{1-p/q} = ||x||_q^p n^{1-p/q}$$

定義.  $x \in \mathbb{R}^d$  が p-計算可能であるとは、計算可能な有理数の組の列  $\{r_n\}$  が存在して、すべての  $n \in \mathbb{N}$  で、

$$||r_{n+1} - r_n||_p \le 2^{-n}$$

かつ

$$\lim_{n \to \infty} r_n = x$$

となることを言う.

**命題.** 任意の  $p,q \ge 1$  に対して,  $x \in \mathbb{R}^d$  が p-計算可能  $\iff q$ -計算可能

証明. d=1のときには、ノルムが一致するので明らか。

 $p \le q$  と仮定する.  $||x||_q \le ||x||_p$  より、p-計算可能であれば q-計算可能.  $||x||_p \le C||x||_q$  より、p-計算可能であれば、有理 数列をいくつかずらすことで q-計算可能.

定義.  $x \in \mathbb{R}$  が弱計算可能であるとは、計算可能な有理数列 $\{r_n\}$  が存在して、

$$\sum_{n} |r_{n+1} - r_n| < \infty$$

かつ

$$\lim_{n} r_n = x$$

となることを言う.

 $\sum_{n} |r_{n+1} - r_n| < \infty$  であれば、コーシー列なので収束することに注意しよう。

# 具体例

- ■計算可能な列は弱計算可能である
- ■弱計算可能であっても、計算可能とは限らない。 例えば、停止確率など。
- 弱計算可能な数は可算個.
- p/ルムに取り替えても、定数倍しか異ならないので、概念は変わらない

問題.  $p \ge 1$  に対して,

$$d(x,y) = |x - y|^p$$

という関数を考える. 計算可能や弱計算可能の概念は変化するか?

### 動機

- なぜこのような関数を考えるか?
- 一般の測度空間におけるL^p空間を考えて、 その空間での弱計算可能な点における 各点での計算可能性を考えると、 このような関数が出てくる

**命題.** p > 1 について,d は距離ではない.特に三角不等式を満たさない.

証明. 例としてp=2の場合は,x=0,y=1とすると,

$$d(0,1) = 1^2 = 1$$

だが、

$$d(0, 1/2) = d(1/2, 1) = \frac{1}{4}$$

より,

$$d(0,1) > d(0,1/2) + d(1/2,1)$$

### 疑問

- ■途中で休憩すると、距離が短くなる。
  そんな距離を考えることに意味があるのか?
- ■古典的には意味はなくても、計算可能性を考慮すると違いが出てくる。

命題.  $x \in \mathbb{R}$  が計算可能  $\iff x$  は p-計算可能.

証明. 例としてp=2の場合を示す.

⇒ は明らか.

 $\Leftarrow lt,$ 

$$|r_{n+1} - r_n|^2 < 2^{-n}$$

であれば, 偶数番目の列を取ることで,

$$|r_{2(n+1)} - r_{2n}| < 2^{-n}$$

とできる.

**命題.**  $x \in \mathbb{R}$  で 2-弱計算可能であるが、弱計算可能でないものが存在する.

証明. 対角線論法により示せる.

### 階層

- 計算可能(computable)
- 弱計算可能(weakly computable)
- p-弱計算可能(p-weakly computable)
- 発散有界計算可能(divergence bounded computable)
- 計算近似可能(computably approximable)

# 今後

- 距離としての性質、ノルムとしての性質.
- p-弱計算可能性についての性質. 特に階層はつぶれていないか.
- ■d次元でのMLランダム性との関連について
- L^2空間における計算可能可測関数の階層の特徴付け