

確率的な判断の仕方

宮部賢志@明治大学理工学部数学科

大磯高等学校

2016年12月13日(火)

大学で学ぶこと

■ 教養

—生活を送る上であると良い知識
＋人生を深く楽しむための知識

例：降水確率50%，知的な会話

■ 専門

—他人と差別化できる自分の担当，特技

例：教員，スポーツ選手，楽器

確率

■ 教養としての確率

—確率の誤解， 確率の種類

=> 恥ずかしい思いをしないために

■ 専門としての確率

—現象を数学的に捉える， 機械学習， 人工知能

=> 物事の本質を捉える， 如何に楽ができるか

確率の種類と誤解

天気予報

車の自動運転

スマートホーム

IoT

シミュレーション

検証

機械学習、人工知能

保険

株価予測

大学院で学ぶ統計学

- 推測統計学
- 信頼区間
- p値
- ノンパラメトリックな検定

大学院で学ぶ確率

- 公理的確率論
- 確率微分方程式
- 連続時間確率過程

大学で学ぶ

- 解析学
- 流体力学
- 数値計算

大学で学ぶ確率・統計

- 密度関数、分布関数
- 正規分布、指数分布、ポアソン分布
- 統計的仮説検定、回帰、相関

高校で学ぶ確率

- さいころ
- 硬貨投げ
- 白玉、赤玉
- 人間の並び替え

合格確率

- 模試を受けて合格確率が10%と出た.
- 合格確率10%の大学を10校受ければ,
1校は受かるだろうと考えた.
- 親に頼み込んで受験料を出してもらったが,
1校も受からなかった.
予備校を訴えようと考えた.

受験には出ない

- 正しいか間違っているかハッキリするものしか、
受験には出ない
- 解釈が曖昧になりうるものは受験には出せない
- 教育的に不適切なものは出せない

問題は何か

- 「10校受ければ1校は受かる」は本当か
- 合格確率とはどういう意味か
- 予備校の判定は信用できるのか,
どう解釈し, どう使えばよいのか.

10回に1回は起こるか？

独立な確率 10% のイベント $A_1, A_2, \dots, A_n$ がある時, 少なくとも 1 つの出来事が起こる確率は,

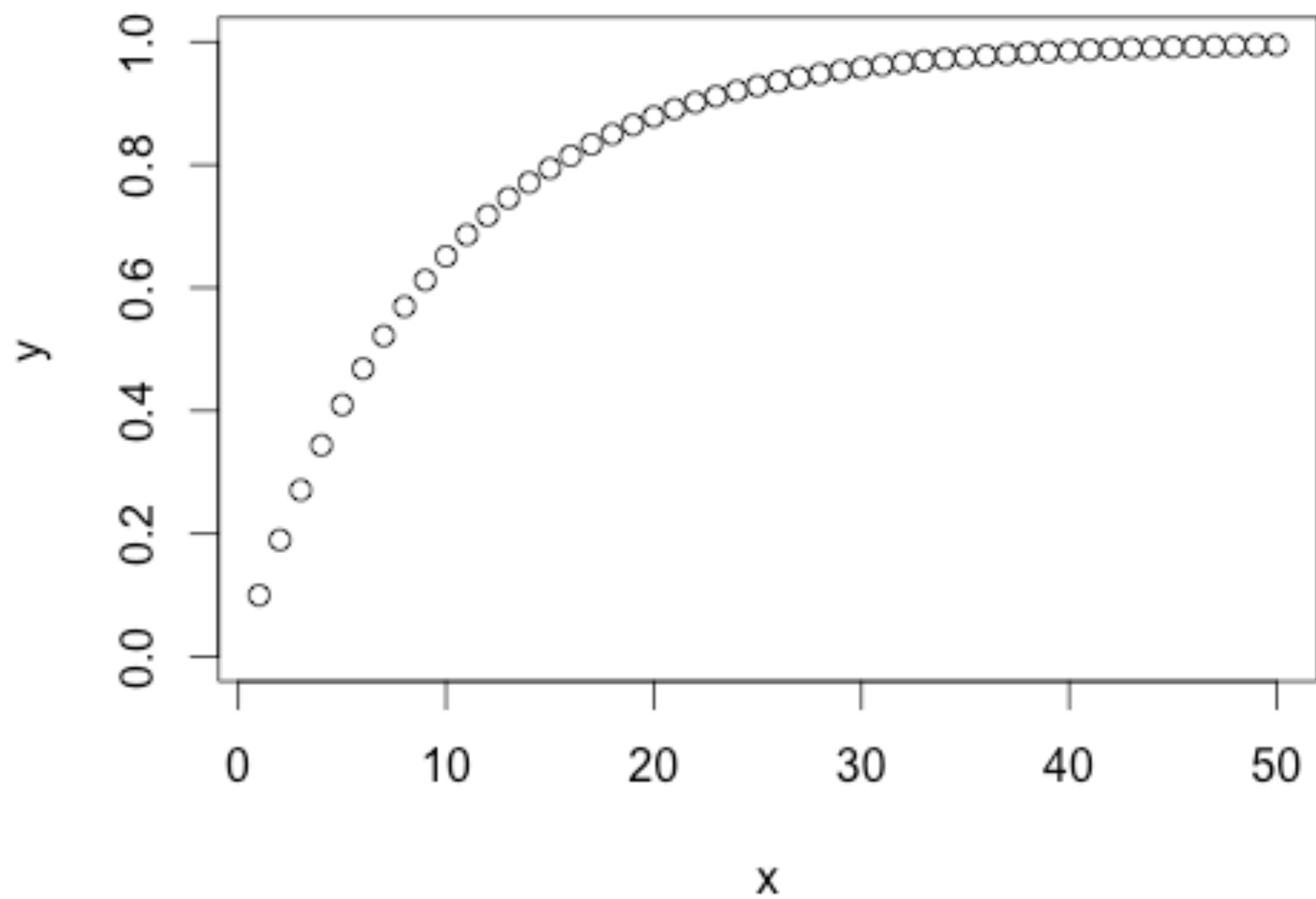
$$1 - \left(1 - \frac{1}{10}\right)^{10} = 0.6513216 \dots$$

つまり, 約 35% では起こらない.

起こらなかったとしても, 怒る必要はない.

そんな「いい加減」で良いのか？

分からないことを分からないと言うのは科学者の正しい態度



合格確率とは？

- 大学受験において確率的に決まることはない
- 例えば「その模試を受けてその点数を取った人の10人に1人が合格する」とすれば、
 - 「その後、実力が伸びる人」
 - 「たまたま苦手な部分が出た人」
 - 「うちの塾に入ればという条件付き」
- 割合と確率の違いは？

確率の解釈

- 誰がどのような手順で計算して、
どういう意味で言っているのかを理解しないと、
確率を上手に利用することはできない。
- 確実ではないからと90%でも志望校を下げたり、
可能性があるからと10%でも受験するのは、
あまり賢い方法ではない。
では、確率（や数学や科学）はどう利用すべきか？

福島原発については大地震の確率を0%としていた。
それで、「確率0%でも巨大地震に見舞われたのだから、全ての原発が危ない」という反対派の主張になった。「0%でもこのうえなく危険」ということになったのでは、もはや地震予知に実際上の意味はない。

（中略）あてにならない確率論で全原発停止への流れを作った菅首相の責任は小さくない。

産経新聞2011年7月1日『外交評論家・岡本行夫 「確率」だけで原発止めるな』より

問題は何か

- 確率0%のことは起こるのか
- そもそも確率0%とはどういう意味か
- 確率は信用できるのか

0%でも起こる例

区間 $[0, 1]$ から「ランダムに」1つ実数を取る.

その数が $[0, \frac{1}{2}]$ にある確率は $\frac{1}{2}$

その数が $[0, \frac{1}{4}]$ にある確率は $\frac{1}{4}$

その数が 0 である確率は 0.

どの数であっても，その数が取り出される確率は 0.

しかし，どれかは取り出されるはず.

信じられるか

- 000...
- 0101011101001010101010100111101111111100...
- 起こる確率が0%だからといって、
上の例が起こるとは「信じられない」が、
下の例では割合「信じられる」だろう
何がそれを分けるのだろうか？

確率の起源

- 1662年 『ポール・ロワイヤル論理学』
(アントワーヌ・アルノー著, フランス語)
の中で初めてprobabilityという言葉が,
確率の意味で使われている
- それまでも「ありそう」 (probable) という表現は
見られる. この本以降, 数値を表すようになる.
- 確率の概念がない世界は大変だったろう. . .

確率論

- 1814年ラプラス『確率の哲学的試論』の中で,
「同様に確からしい」を基に確率論を展開
=>現在の高校で学ぶ確率
- 1933年コルモゴロフ『確率論の基礎概念』の中で,
測度論的な確率論を展開
=>大学以降で学ぶ現在利用されている確率論

確率解釈

- 頻度説——繰り返し実験した時の相対頻度の極限
- 主観説——信念の度合い
- 傾向説——起こりやすさという性質

確率的な判断

ランダム性の判定

- その誤差が「偶然によるもの」なのか,
「偶然と考えるのは不自然なもの」なのか.
- 2つのクラスのテストの平均点の差,
サイコロで1が100回連続出た

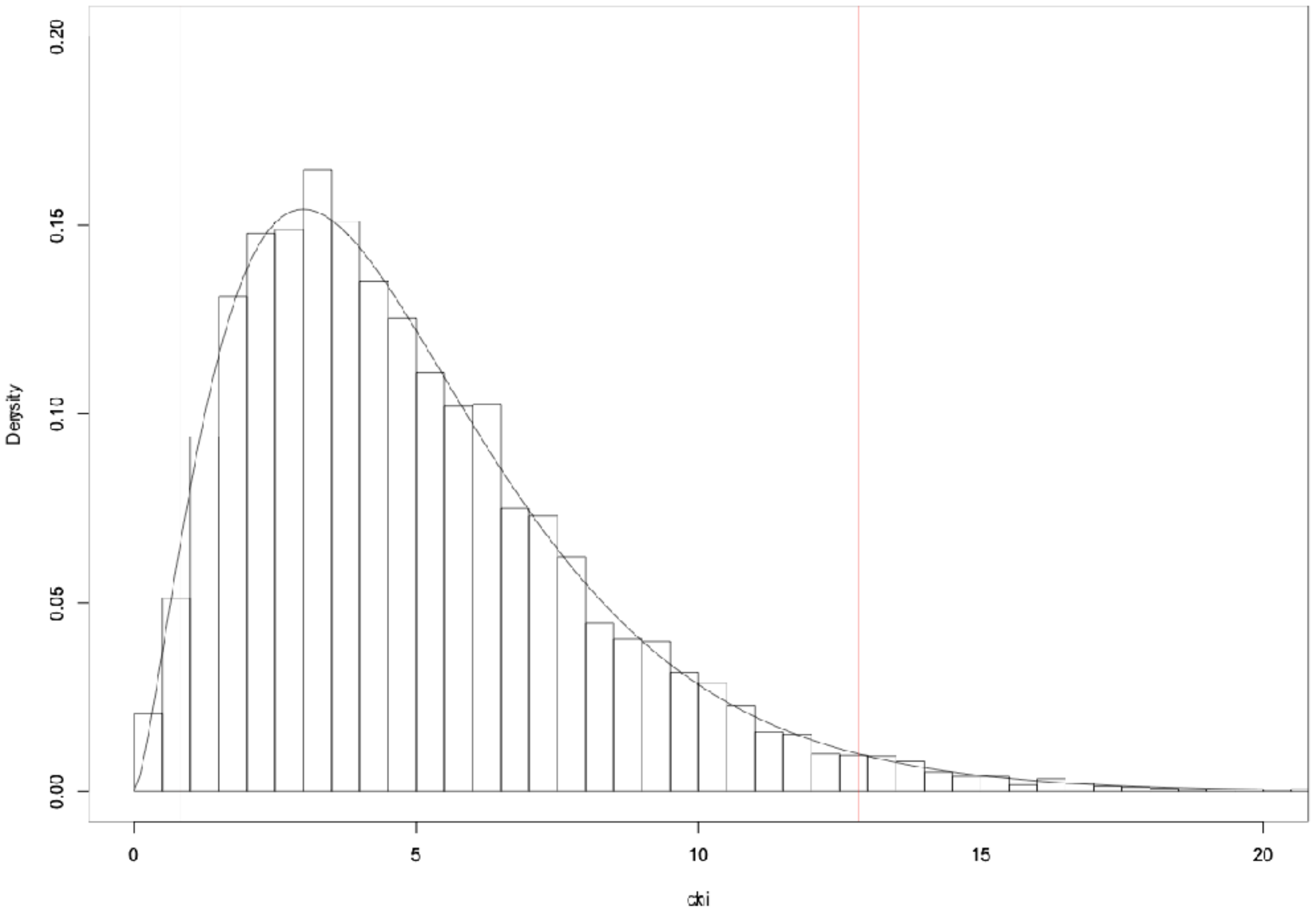
手順

- 1から6までの数字をランダムに120個書く

手順

- 1から6までの数字をランダムに120個書く
- $\chi^2 = (\text{それぞれの個数} - 20)^2 / 20$ の合計
- 0.831212～12.8325となるか確認する

Histogram of chi



統計的検定の考え方

- もしランダムならば95%の確率で赤い線の中に入る
- 入らなかったとすれば、ランダムでないと考えるのが妥当
- ただし、5%の確率でこの判断は間違う

数学科で学ぶこと

■ 例の数字はどうやって求めるの？

=> 高度な微積分を使って求める.

自由度 k の χ^2 分布の密度関数は,

$$f(x, k) = \begin{cases} \frac{(1/2)^{k/2}}{\Gamma(k/2)} x^{k/2-1} e^{-x/2} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

ここで, Γ はガンマ関数.

大学で学ぶこと

- 統計的検定は理系文系問わず必要になる。
(むしろ数学科では必要ない人が多い。)
- 統計的検定は「唯一絶対の真理」ではない。
先人たちが見つけた「妥当な手順」である。
それを知らないとおかしな推論をする。
知っていても信用しすぎてはいけない。

まとめ

- 確率には複数の解釈があるので、
注意深く気をつける必要がある
- 正しい，間違いでは割り切れない世の中だからこそ、
確率的な考え方が役に立つことがある