

Randomness of randomness deficiency

宮部賢志 明治大学数学科

2017年3月7日 首都大学東京明治大学合同ゼミ

ランダム性が不足している

- ❖ 非ランダム性
- ❖ randomness deficiency
- ❖ ランダム性と収束の速さ

Kolmogorov 複雑性
と
ML ランダムネス

$D(A)$ のランダム性

ランダム性が不足している

非ランダム性

ランダムな2進無限列 A を考える.

$A = 0110100111011000110101000111000001110101010 \dots$

A の最初の100桁を0で置き換えた列 B を考える.

$B = 000 \dots$

どちらも起こりうるという意味で A も B も”ランダム”である. B の方が信じがたいという意味で, B の方が非ランダム性を多く持っている. この非ランダム性を **randomness deficiency** と言う.

randomness deficiency

$d(A)$ を A の randomness deficiency とする. 実は randomness deficiency には様々な定式化が存在するが, どれに対しても, $d(A)$ は下から近似可能で,

$$d(A) < \infty \iff A \in \text{MLR}$$

が成り立つ.

今回は,

$$D(A) = \sum_n 2^{n-K(A \upharpoonright n)}$$

という量を考える.

ランダム性と収束の速さ

Solovay 還元の結果を思い起こせば,

- A がランダム
- $D(A)$ は収束が速い
- $D(A)$ がランダム

という関係があるはず.

更に,

- A の計算可能性が低い.

ということも関係してくることを見る.

ランダム性が不足している

Kolmogorov 複雑性と
ML ランダムネス

- ❖ Kolmogorov 複雑性
- ❖ ML ランダムネス
- ❖ Ample Excess Lemma
- ❖ Picture 1
- ❖ van Lambalgen's theorem
- ❖ weakly low for K
- ❖ 2 ランダム
- ❖ 証明

$D(A)$ のランダム性

Kolmogorov 複雑性と ML ランダムネス

Kolmogorov 複雑性

prefix-free 万能機械 U を固定する.

$\sigma \in 2^{<\omega}$ に対し, σ の複雑性を

$$K(\sigma) = \min\{|\tau| : U(\tau) = \sigma\}$$

で定義する.

$\sigma \in 2^n$ に対して,

$$K(\sigma) \leq |\sigma| + K(|\sigma|) + O(1)$$

などが成り立つ.

MLランダムネス

$A \in 2^\omega$ が **MLランダム** であるとは,

$$K(A \upharpoonright n) > n - O(1)$$

を満たすことと定義する.

- MLランダムな列の測度は1
- MLランダムならば大数の法則が成り立つ
- その他多くの良い性質

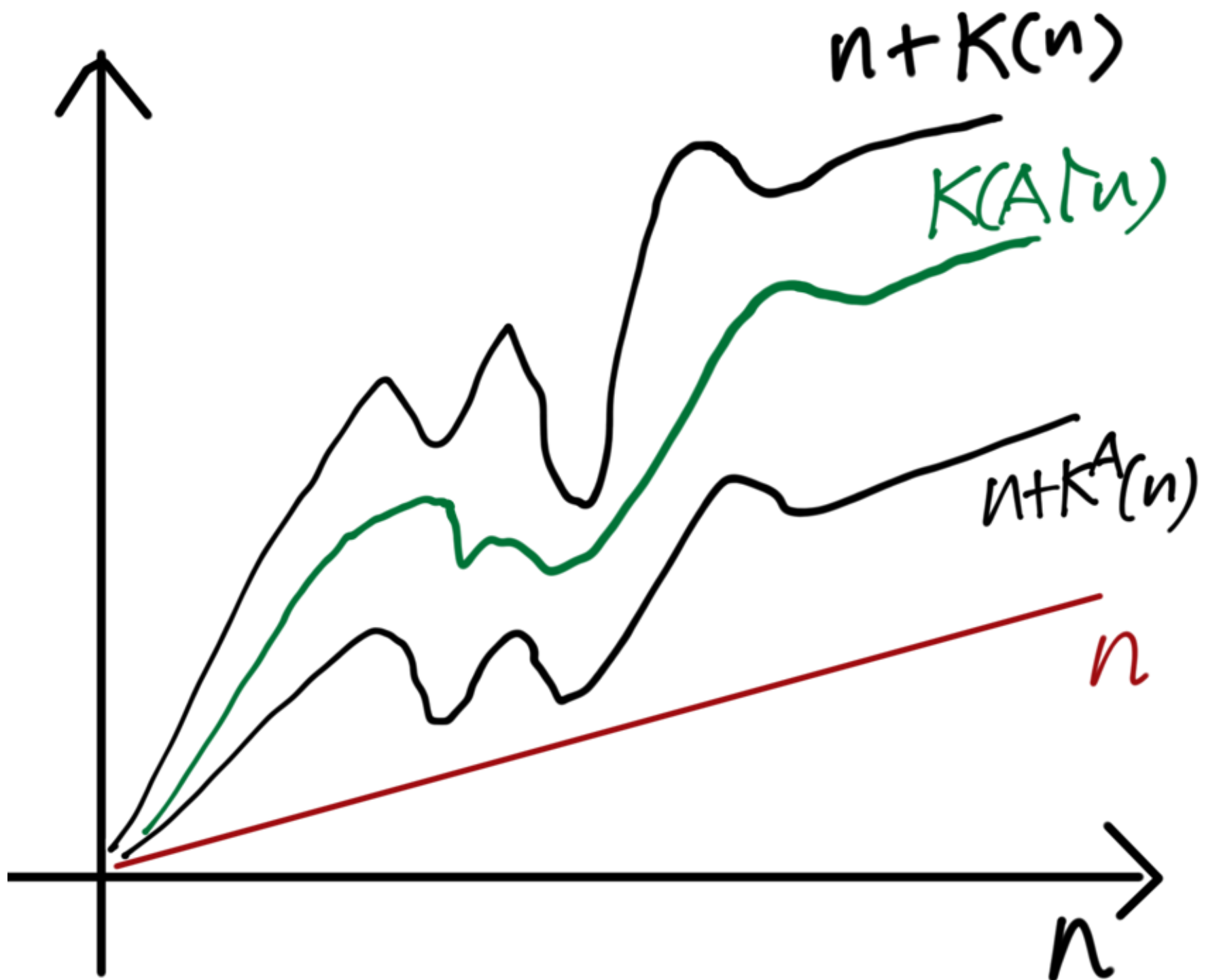
Ample Excess Lemma

定理 1 (Gács, Miller-Yu).

A が ML ランダム $\iff D(A) = \sum_n 2^{n-K(A \upharpoonright n)} < \infty$.

系 2. A が ML ランダムならば,

$$K(A \upharpoonright n) \geq n + K^A(n) - O(1).$$



van Lambalgen's theorem

定理 3 (van Lambalgen).

$A \oplus B$ が ML ランダム

$\iff A$ が ML ランダムかつ B が A - ML ランダム.

weakly low for K

定義 4.

left-c.e. 実数で ML ランダムとなるものを Ω で表す.

定理 5. $\Omega \equiv_T 0'$

定理 6 (Miller).

Ω が A -ML ランダム $\iff K(n) \leq K^A(n) + O(1)$ *i.o.*

2ランダム

定義 7. A が 2ランダムであるとは, O' -ML ランダムであること.

定理 8 (Miller). A が 2ランダムであることと,

$$K(A \upharpoonright n) \geq n + K(n) - O(1) \text{ i.o.}$$

は同値.

証明

⇒ の証明.

A が 2 ランダムならば, A は Ω -ML ランダム. van Lambalgen の定理より, Ω は A -ML ランダム. よって, $K(n) \leq K^A(n) + O(1)$ i.o. Ample Excess Lemma より,

$$K(A \upharpoonright n) \geq n + K^A(n) - O(1) \geq n + K(n) - O(1) \text{ i.o.}$$

□

逆も難しくはないが, 今回は省略.

ランダム性が不足している

Kolmogorov 複雑性
と
ML ランダムネス

$D(A)$ のランダム性

- ❖ Solovay 関数
- ❖ 2 ランダムネス
- ❖ $\geq_T \emptyset'$
- ❖ 関連する問題
- ❖ 終わり

$D(A)$ のランダム性

Solovay関数

定義 9. $f : \omega \rightarrow \omega$ が Solovay 関数であるとは,

- $\sum_n 2^{-f(n)} < \infty$,
- $f(n) \leq K(n) + O(1)$ i.o.

定理 10 (Bienvenu et al.).

$f : \omega \rightarrow \omega$ が Solovay 関数であることと, $\sum_n 2^{-f(n)}$ が ML ランダムであることは同値.

2ランダムネス

定理 11. A が 2ランダムならば, $D(A)$ は A -ML ランダム.

証明. A が 2ランダムならば,
 $K(A \upharpoonright n) \leq n + K^A(n) + O(1)$ i.o. よって, $K(A \upharpoonright n) - n$
は A -Solovay 関数なので, $D(A)$ は A -ML ランダム. \square

予想 12. 逆も成り立つ?

$$\geq_T \emptyset'$$

命題 13.

A が ML ランダムで $A \geq_T \emptyset'$ ならば, $D(A)$ は A - ML ランダムではない.

証明. $A \geq_T \emptyset'$ より, Friedberg's jump inversion theorem より, $B' \equiv_T A$ となる $B \in 2^\omega$ が存在する. 特に, $A \in \Delta_2^B$. limit lemma より, A の B -計算可能な近似列 A_n が存在する. この近似列を使って, $D(A) = \sum_n 2^{n-K(A \upharpoonright n)}$ にも B -計算可能な近似列が存在する. よって, $D(A) \in \Delta_2^B$ であり, $D(A) \leq_T B' \equiv_T A$. 特に, $D(A)$ は A - ML ランダムではない. \square

関連する問題

問題 14. A が ML ランダムならば, $D(A)$ は ML ランダムか?

問題 15. D から誘導される測度は連続か? D の値域は?

問題 16. $E(A) = \sum_n 2^{-K(A \upharpoonright n)}$ が A -ML ランダム $\iff A$ は K -trivial?

\Leftarrow は $K(A \upharpoonright n)$ が A -Solovay 関数であることに注意すればすぐ分かる. 逆は $A \leq_T E(A)$ を示せば十分だが...

終わり

Thank you for your attention.

