よりランダムな列を一様に計算できるか

宮部賢志　明治大学数学科

2017 年 3 月 25 日
日本数学会　於　首都大学東京

背景と主定理

問題

$f : \omega \to \omega$ が計算可能であるとは，Turing マシンで計算可能であることであった.

では「ランダム列へのアクセスを許して計算可能な問題」とは，どのような問題だろうか？

これは「ランダムな列」の定義に依存するが,「よりランダムな列を計算する」ことはできるだろうか？

問題とは

ここでの問題とは，Cantor 空間 2^ω の部分集合を意味し，ある問題の解が 1 つ与えられたとき，別の問題の解を計算できるか，という問を考える．
例えば，MLR を Martin-Löf ランダムな列の集合とし，NC で計算不可能な列の集合を表すとする．これらは,「問題」であり,「解の集合」と見る．
どんな解 $x \in \mathrm{MLR}$ もある $y \in \mathrm{NC}$ を計算できるので（$y = x$ とすればよい），問題 MLR は問題 NC よりも（解の構成に関して計算可能性の観点において）難しいという．
PA で Peano 算術の完全拡大の集合とすると，PA は MLR よりも上記の意味で「難しい」ことが知られている．

多数問題

Definition 1. $P, Q \subseteq 2^\omega$ とする.

P が Q に Muchnik 還元可能 ($P \leq_w Q$) とは, すべての $f \in Q$ に対して, $g \leq_T f$ となる $g \in P$ が存在することを言う.

P が Q に Medvedev 還元可能 ($P \leq_s Q$) とは, ある Turing 汎関数 Φ が存在して, すべての $f \in Q$ に対して $\Phi^f \in P$ となることを言う.

違いは一様性にある.

主定理

ランダムの階層

$$\mathrm{KR} \supset \mathrm{SR} \supset \mathrm{CR} \supset \mathrm{MLR} \supset \mathrm{DiffR} \begin{array}{ccc} \supset & \mathrm{W2R} & \supset \\ \supset & \mathrm{DemR} & \supset \end{array} \mathrm{2R}$$

Muchnik 次数

$$\mathrm{KR} <_w \mathrm{SR} \equiv_w \mathrm{CR} <_w \mathrm{MLR} \equiv_w \mathrm{DiffR} \begin{array}{ccc} <_w & \mathrm{W2R} & <_w \\ <_w & \mathrm{DemR} & <_w \end{array} \mathrm{2R}$$

Medvedev 次数

$$\mathrm{SR} <_s \mathrm{CR}, \quad \mathrm{MLR} <_s \mathrm{DiffR}$$

証明

$\mathrm{SR} <_s \mathrm{CR}$

ゴールは,

$$\forall \Phi \exists X \in \mathrm{SR}[\Phi(X) \notin \mathrm{CR}].$$

特に $\Phi = \mathrm{id}$ の時は,

$$X \in \mathrm{SR} \setminus \mathrm{CR}$$

を意味する．よって，SR と CR の分離の証明 (Nies-Stephan-Terwijn) 方法を拡張する．

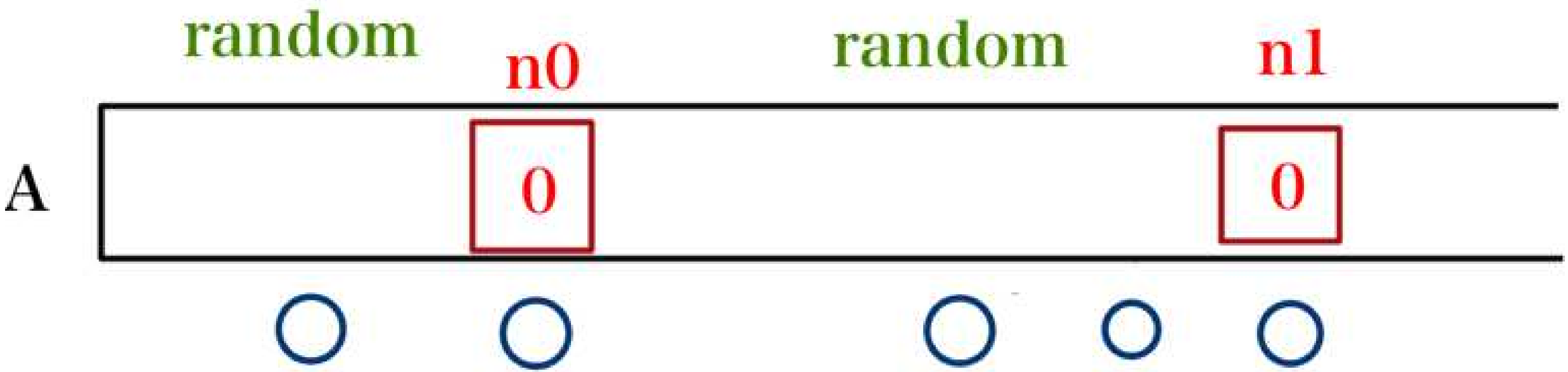
$\mathrm{SR} \supsetneq \mathrm{CR}$

id の場合

- ランダム列 A を構成する.
- 疎な集合上で $A(n_k) = 0$ とする
  $\Rightarrow$ 疎なので Schnorr ランダムにはならない
- n_k の候補の数を小さくする
  $\Rightarrow$ 計算可能なマルチンゲールで成功する

SR $\supsetneq$ CR

The positions forcing 0 are sparse.



The numbers of candidates are small.

$\mathrm{SR} <_s \mathrm{CR}$

一般の場合

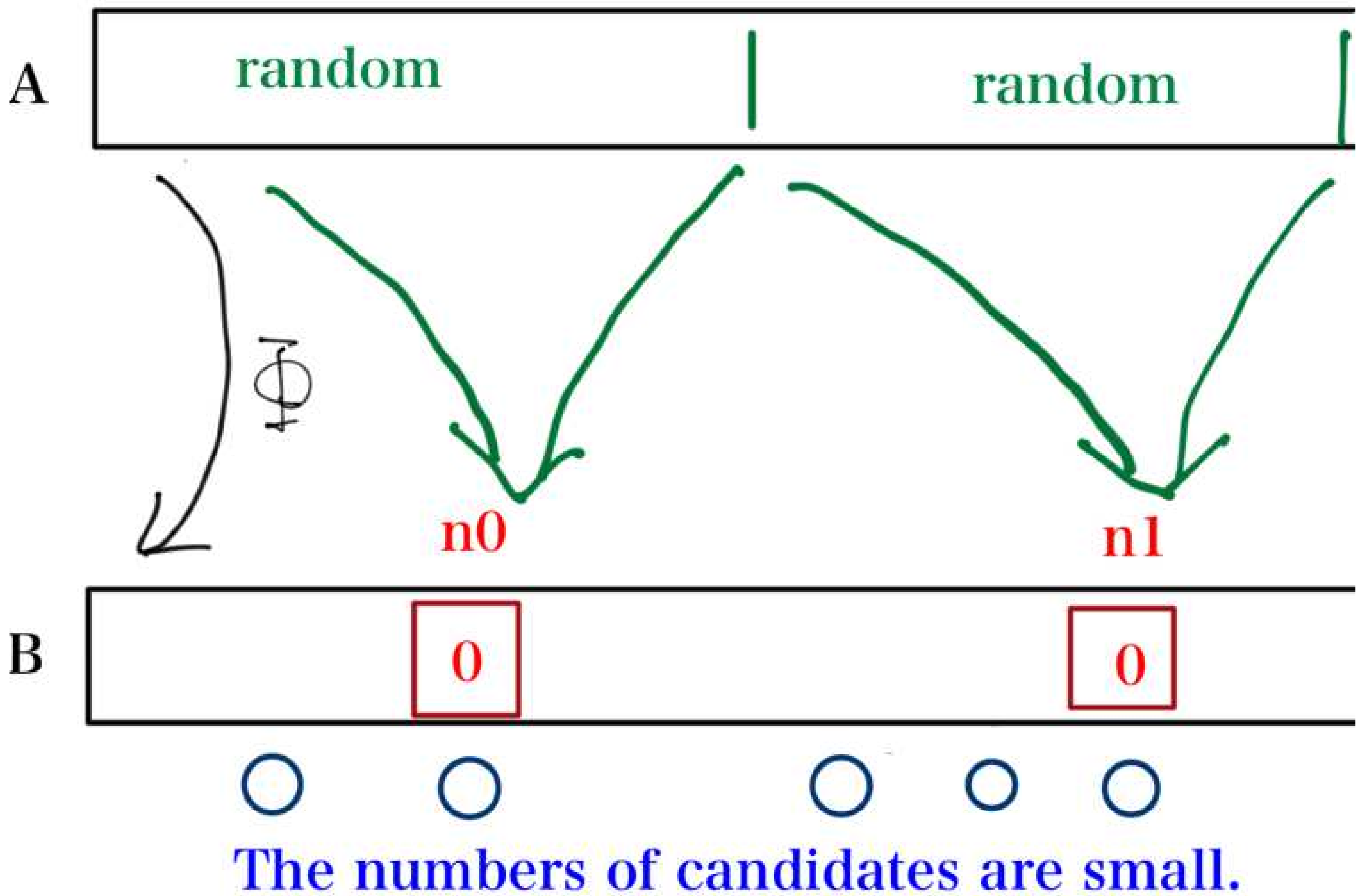
- $A \in \mathrm{SR}$ と $B = \Phi(A) \notin \mathrm{CR}$ を構成する．
- 適当な集合で $B(n_k) = 0$ とする (*)
- n_k の候補の数は小さい
  $\Rightarrow B \notin \mathrm{CR}$.

(*) の要求は強すぎるかもしれない．なぜなら，

$$\lambda(\{X \in 2^\omega \ : \ \Phi(X)(n_k) = 0\})$$

が小さすぎるかもしれない．

$\mathrm{SR} <_s \mathrm{CR}$



$\mathrm{SR} <_s \mathrm{CR}$

誘導測度 μ の条件により場合分け.

- μ が一様測度に「近い」 $(\mathrm{CR}(\mu) \subseteq \mathrm{CR}(\lambda))$
  $\Rightarrow$ 同じ方法が適用できる
- μ が一様測度とは「だいぶ違う」 $(\mathrm{CR}(\mu) \not\subseteq \mathrm{CR}(\lambda))$
  $\Rightarrow$ その違いを利用して証明する

$\mathrm{CR}(\mu) \not\subseteq \mathrm{CR}(\lambda)$

$$\exists Y \in \mathrm{CR}(\mu) \setminus \mathrm{CR}(\lambda)$$

CR に対する no-randomness-from-nothing (Rute) により，

$$\exists X \in \mathrm{CR}\ [\Phi(X) = Y].$$

よって，$X \in \mathrm{SR}$ かつ $\Phi(X) \notin \mathrm{CR}$.

$\mathrm{CR}(\mu) \subseteq \mathrm{CR}(\lambda)$

以下は Bienvenu-Merkle の結果の証明を読むことで分かる.

Lemma 2. μ, ν を計算可能な測度とすると,

$$\mathrm{CR}(\mu) \subseteq \mathrm{CR}(\nu) \Rightarrow \mathrm{MLR}(\mu) \subseteq \mathrm{MLR}(\nu) \Rightarrow \mu \ll \nu$$

ここで, $\ll$ は絶対連続を表す.

$\mathrm{CR}(\mu) \subseteq \mathrm{CR}(\lambda)$

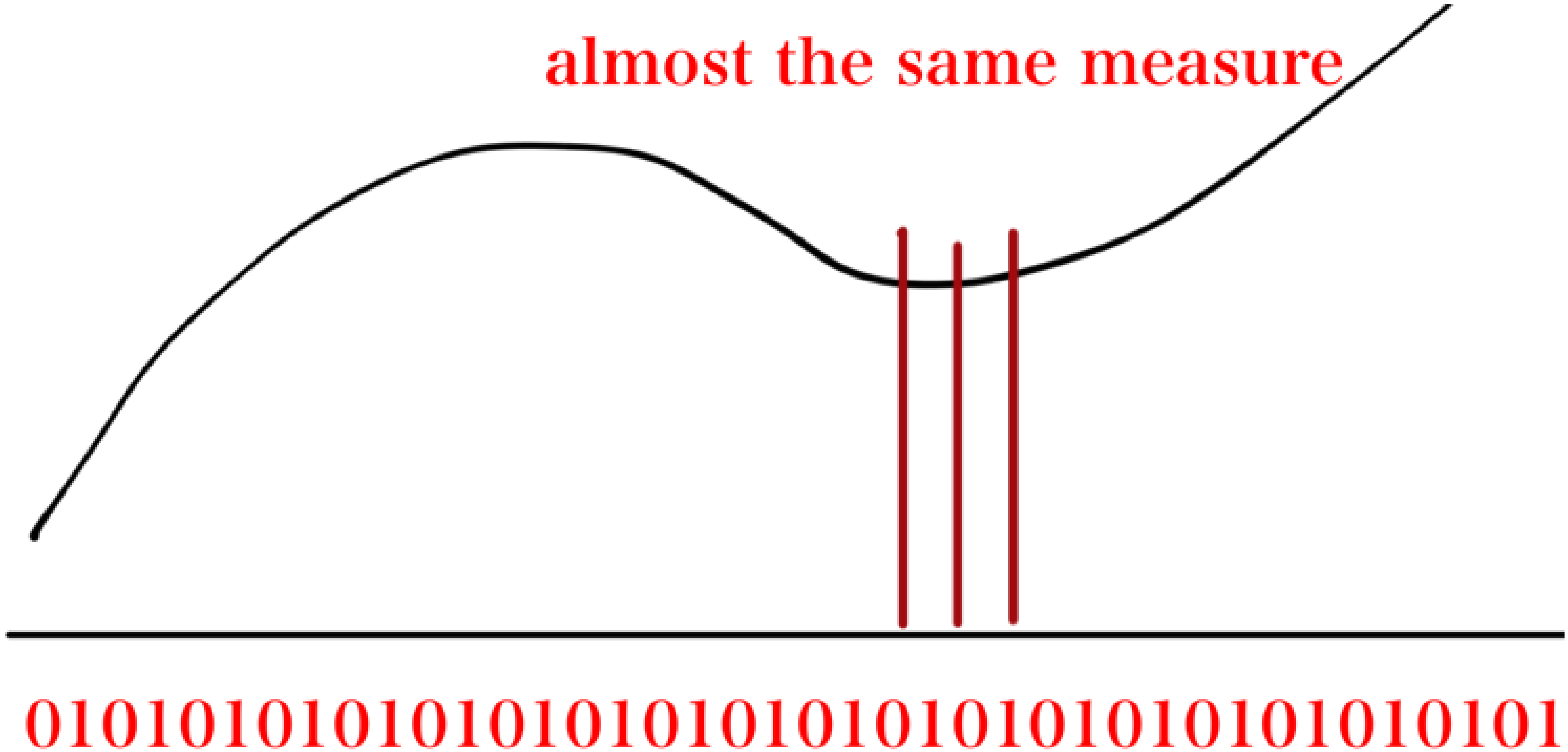
以下の観察が本質部分．

Lemma 3. Φ をほとんど至るところ計算可能な汎関数とし，μ を λ と Φ からの誘導測度とする．$\lambda \ll \mu$ とする．任意の $\sigma \in 2^{<\omega}$ に対し，

$$\lim_{n\to\infty} \lambda\{X \in [\sigma] \,:\, \Phi(X)(n) = 0\} = \frac{1}{2}\lambda(\sigma).$$

Proof. Radon-Nikodym 微分を考え，Lévy の 0-1 法則を適用する． □

$\mathrm{CR}(\mu) \subseteq \mathrm{CR}(\lambda)$



まとめ

課題

Question 4. wtt 還元で SR から CR を計算できるか？
tt 還元では？

非一様にもできないと予想している.

まとめ

- 非一様には可能だが，一様には不可能となる 2 つの問題をみつけた．
- 解析の手法と計算論の手法の融合が面白い．特に，a.e. 計算可能関数についてはより深く調べられるべき．

明治大学
MEIJI UNIVERSITY