

ベリーのパラドックス

宮部賢志 明治大学数学科

2017年4月22日 新入生の日

ベリーのパラドックス

—— ベリーのパラドックス ——

19文字以内で記述できない最小の自然数

楽しむためには技術が必要

—— ベリーのパラドックス ——

19 文字以内で記述できない最小の自然数

数学は高度に知的な遊びで，楽しむには技術が必要。
ゲームを楽しむには，ルールを学ぶ必要がある。

皆笑っているのに，自分だけ笑えないのは悔しい。
数学独特の面白さがある。

例を考える

—— ベリーのパラドックス ——

19文字以内で記述できない最小の自然数

- 0, 1, 2, 3などは短い文字数で書ける
- 大きな数でも、「10の100乗」などのように短い文字で書けるものもある
- 「10の(10の10乗)乗」のように、かなり大きな数でも書けるものがある

しかし、そのような数はきっと存在するはず…
なぜなら…

有限と無限

—— ベリーのパラドックス ——

19文字以内で記述できない最小の自然数

- 日本語で使うことのできる文字は有限だから、19文字以内で記述できる自然数も有限。
- 自然数は無限個存在する。
- よって、19文字以内で記述できない最小の自然数は存在するはず。それを a とする。
- その a は「19文字以内で記述できない最小の自然数」という19文字で記述されている。これは矛盾。

数学の危機

Berry(1867-1928)はOxfordの司書。

Russell's paradox(1902)が有名, しかも原因不明(当時).
大変な衝撃. なぜなら…

- 「数学(論理)で証明されたことは未来永劫正しい」という信頼が揺らぐ.
- 「論理学は思考の基礎」というヨーロッパの標準的な教育の見直し.
- 「科学の基礎としての数学」という位置づけの見直し.

その後30年をかけて原因が分析され, 数学はそれまでと若干異なる形で信頼を回復することになる.

小史

- 様々なパラドックスが見つかり，数学の基礎に疑問が持たれる．
- 1900年の国際数学者会議における Hilbert の 23 の問題．そのうちの第2問題は「算術の公理と無矛盾性」．数学を記号操作として捉え，数学の無矛盾性を有限の立場に還元する．
- ZFC の提案 (ZF の提案が 1908 年), 『Principia Mathematica』 Whitehead, Russell(1910-1913)
- 1931 年, Gödel の不完全性定理の発表．
- 1936 年, ゲンツェンによる自然数論の無矛盾性の証明．
- 1954 年, 竹内外史による実数論の無矛盾性の証明．

何が本質か

計算機のプログラミング言語を1つ好きなものを選ぶ(例えば, C言語).

プログラムは0と1の有限文字列であり, 自然数を入力するものだけを考える.

すると,

$n \mapsto n$ 文字以下のプログラムで書けない最小の自然数

という関数 f が存在する.

この f は計算不可能である. もし計算可能ならば, この f を計算するプログラムが存在して, そのプログラムと自然数 n の情報を入れれば, $f(n)$ が出力されるが, そのプログラムは $\log n$ 程度の長さ.

証明, 計算, 確率, 学習

- 証明と計算の深い関係 (Curry-Howard 対応)
- 計算可能性と記述可能性の関係 (Kolmogorov 複雑性)
- 記述不可能=予測不可能=ランダム
- ランダム性と学習や確率概念との関係 (Solomonoff の万能推論)
- 数理モデルの計算可能性 (力学系・カオス)

終わり

ありがとうございました。

