停止確率 Ω

宮部賢志　明治大学数学科

2017 年 10 月 28 日 (土)
数学基礎論若手の会 2017

昔の話
❖ ランダムネスの小史
❖ Ω の定義
❖ Ω の性質
❖ 図
❖ left-c.e.
❖ machine
❖ prefix-free
❖ Kraft の不等式
❖ Solovay 還元
❖ Solovay complete
❖ ML-random
比較的最近の話

昔の話

ランダムネスの小史

1919-　von Mises により頻度説に基づく確率論の提案．Collective というランダム列の概念の重要性が指摘される．

1966　Martin-Löf によるランダム列の定義の提案．計算可能性と統計的検定を使う．
1970s　Schnorr, Levin, Kolmogorov らにより，予測不可能性および圧縮不可能性による特徴付けが得られる．

2000-　Nies, Downey ら計算論の研究者が興味を持ち始める．

Ωの定義

定義 1 (Chaitin 1975or76).
$U :\subseteq 2^{<\omega} \to 2^{<\omega}$ を prefix-free universal machine として，

$$\Omega_U = \sum \{2^{-|\sigma|} \ : \ U(\sigma)\downarrow\}$$

とする．

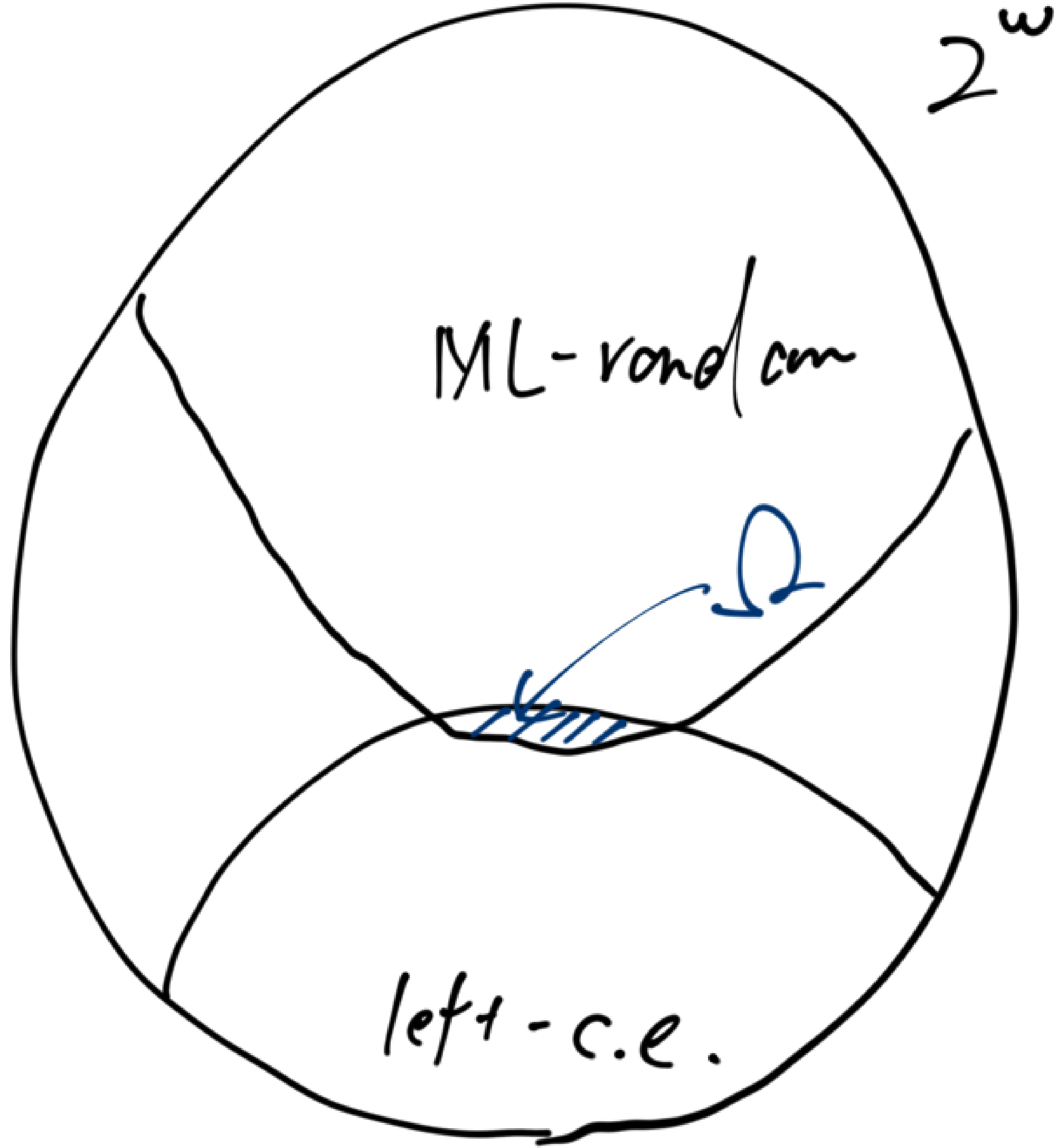
prefix-free universal machine U に依存しない性質を考える場合には，U を省略して，Ω と書く．

Ω の性質

定理 2 (たくさん)**.** *left-c.e. real* α に対して以下は同値.

- ある *prefix-free universal machine* U が存在して, $\alpha = \Omega_U$ となる.
- α は *Solovay complete*.
- α は *ML-random*.

超解釈：Ω は賢くてランダム．そのような数は Ω となる数しか存在しない.



2^ω
ML-random
Ω
left-c.e.

定義 3.
$A \subseteq \omega$ が c.e. であるとは，(HF or PA で)Σ^0_1-definable であることをいう．

$A \subseteq \omega$ が computable であるとは，A と A の補集合 A^c が共に c.e. であることをいう．

ω と $\mathbb{Q}$ や $2^{<\omega}$ などの可算集合は適当な対応関係により同一視する．

$x \in \mathbb{R}$ が left-c.e. であるとは，$\{q \in \mathbb{Q} : q < x\}$ が c.e. であることをいう．

machine

定義 4. 関数 $U :\subseteq 2^{<\omega} \to 2^{<\omega}$ が partial computable function (or p.c.f. or machine) であるとは，U を表現する集合

$$\{\langle\sigma, \tau\rangle \ : \ U(\sigma) = \tau\}$$

が c.e. であることをいう．σ に対して対応する τ が存在すれば $U(\sigma)\downarrow$ と書き，存在しなければ $U(\sigma)\uparrow$ と書く．

machine U が universal であるとは，任意の machine V に対して，ある $\sigma \in 2^{<\omega}$ が存在して，すべての $\tau \in 2^{<\omega}$ で

$$U(\sigma\tau) \simeq V(\tau)$$

となることをいう．

prefix-free

定義 5. $A \subseteq 2^{<\omega}$ が prefix-free とは，任意の異なる $\sigma, \tau \in A$ について，互いに接頭辞にならないことをいう．
machine が prefix-free とはその定義域が prefix-free であることをいう．

c.f. 電話番号の集合

Kraftの不等式

定理 **6.** *prefix-free set* $A \subset 2^{<\omega}$ に対して，

$$\sum_{\sigma \in A} 2^{-|\sigma|} \leq 1$$

特に，$\Omega = \sum\{2^{-|\sigma|} \ : \ U(\sigma)\downarrow\} \in [0,1]$.

Solovay還元

定義 7. left-c.e. real α, β に対して，$\alpha \leq_S \beta$ とは，ある $c \in \omega$ と left-c.e. real γ が存在して，

$$c\beta = \alpha + \gamma$$

となることをいう．

left-c.e. real は和に関しては閉じているが，差に関しては閉じていないことに注意．

定理 8.

$$\alpha \leq_S \beta \Rightarrow \alpha \leq_T \beta$$

定理 9. Ω は *Solovay complete*．すなわち，すべての *left-c.e. real* α に対して，$\alpha \leq_S \Omega$.

証明. 2 進有理数の単調増加な計算可能数列 $\{a_n\}$ で $\alpha = \lim_n a_n$ となるものをとる．$a_0 = 0$ とし，各 $n \in \omega$ について $a_{n+1} - a_n$ の量だけ止まる machine M を考える．すなわち，$\alpha = \sum\{2^{-|\tau|} : M(\tau)\downarrow\}$ である．U の universality より，

$$\Omega = \sum_{U(\sigma\tau)\downarrow} 2^{-|\sigma|-|\tau|} + \sum_{U(\rho)\downarrow, \sigma \not\preceq \rho} 2^{-|\rho|} = 2^{-|\sigma|}\alpha + \gamma$$

$\square$

ML-random

$$K(\sigma) = \min\{|\tau| \ : \ U(\tau) = \sigma\}$$

$A \in 2^\omega$ が ML-random であるとは，$K(A \upharpoonright n) > n - O(1)$ であること．

定理 10. Ω は *ML-random.*

昔の話

比較的最近の話

❖ addition

❖ derivative by Ω

❖ strong K and S reducibility

❖ split and non-split

❖ 終わり

比較的最近の話

addition

定理 11 (Downey, Hirschfeldt, and Nies 2002). α, β を *left-c.e. real* とする．$\alpha + \beta$ が *ML-random* であれば，α, β の少なくとも一方は *ML-random* である．

定理 12 (Downey, Hirschfeldt, and Nies 2002). γ を *ML-random* でない *left-c.e.* とする．$\alpha + \beta = \gamma$ を満たす *left-c.e. real* $\alpha, \beta <_S \gamma$ となるものが存在する．

derivative by Ω

定理 13 (Calude, Coles, Hertling, and Khoussainov)**.**
$\alpha \leq_S \beta$ *iff* $\forall \{b_n\}\ \exists c \exists \{a_n\}$ *such that* $\alpha - a_n < c(\beta - b_n)$

定義 14.

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \beta} = \lim_{s \to \infty} \frac{\alpha - \alpha_s}{\beta - \beta_s}$$

定理 15 (Barmpalias, Lewis-Pye)**.**

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \Omega} = \begin{cases} c_\alpha > 0 & \text{if } \alpha \text{ is ML-random,} \\ 0 & \text{if } \alpha \text{ is not ML-random.} \end{cases}$$

strong K and S reducibility

定義 16. $\alpha \ll_K \beta$ if $\lim_n (K(\beta \upharpoonright n) - K(\alpha \upharpoonright n)) = \infty$.

定義 17 (M.). $\alpha \ll_S \beta$ if $\exists \{a_n\} \forall \{b_n\}$

$$\lim_s \frac{\alpha - \alpha_s}{\beta - \beta_s} = 0.$$

定理 18 (M.).

$$\alpha \ll_K \beta \Rightarrow \alpha \ll_S \beta \Rightarrow \alpha <_S \beta$$

どちらも逆は不成立.

split and non-split

命題 19. α, β, γ を *left-c.e. real* とする．$\alpha, \beta \ll_S \gamma$ ならば，$\alpha + \beta \ll_S \gamma$.

系 20. *left-c.e. real* α, β が *ML-random* でなければ，$\alpha + \beta$ は *ML-random* でない．

Downey-Hirshfeldt-Nies の結果の別証明になっている．

系 21. *left-c.e. real* α に対して，$\beta <_S \alpha$ かつ $\beta \not\ll_S \alpha$ となる β が存在することと，α が *ML-random* でないことは同値.

終わり

ありがとうございました

明治大学
MEIJI UNIVERSITY