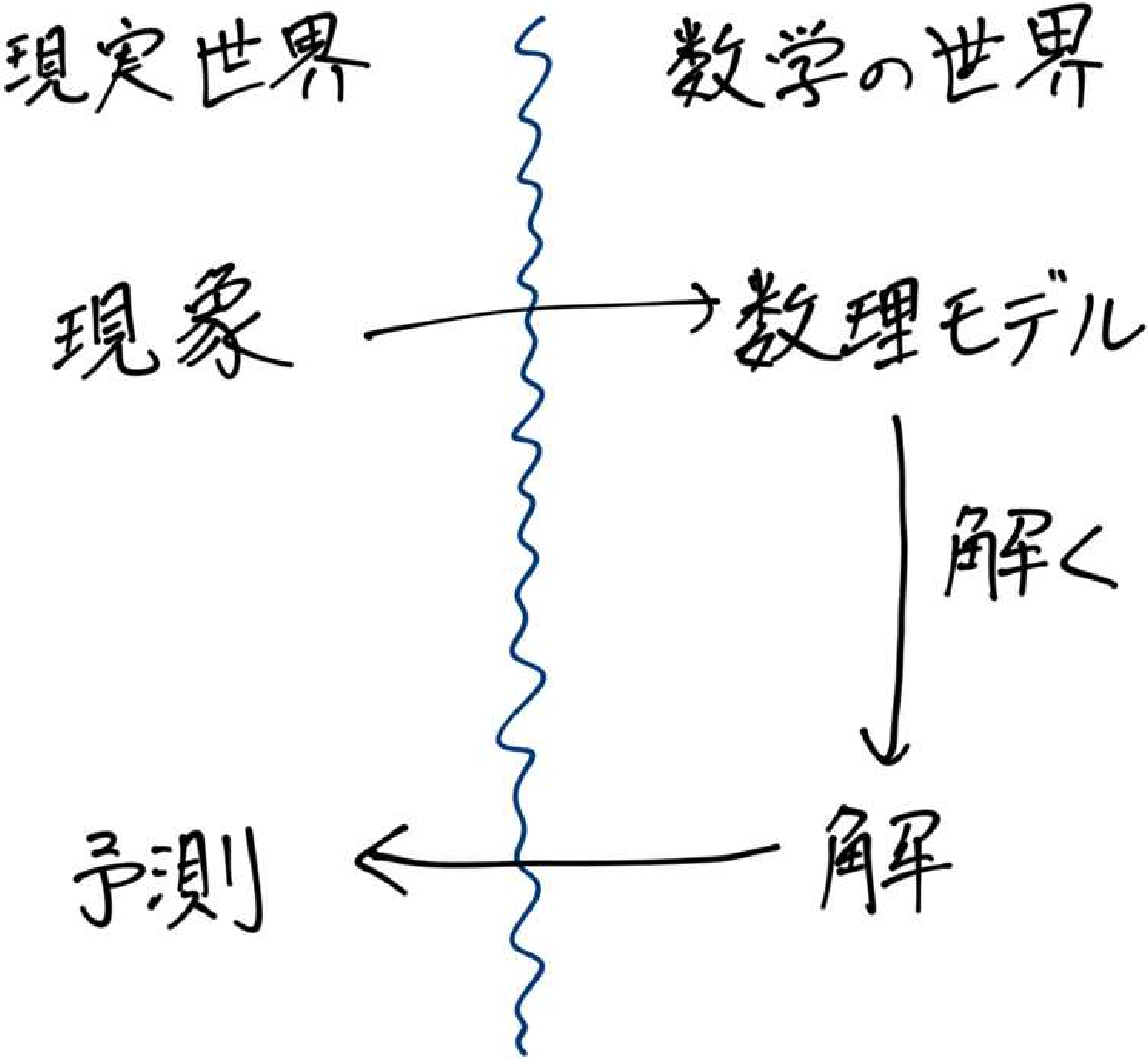
ランダムな点での計算

宮部賢志　明治大学数学科

2017 年 12 月 14 日 (木)
IPA Math 2017@明治大学中野キャンパス

アルゴリズム的ランダムネス



現実世界
数学の世界
現象
数理モデル
解く
解
予測

確率モデル

モデルは,

「モデルが現象をうまく説明している」

と言うことはできても,

「現象がそのモデルのとおりに動作している」

と言うことはできない.

確率モデルではなおさら.

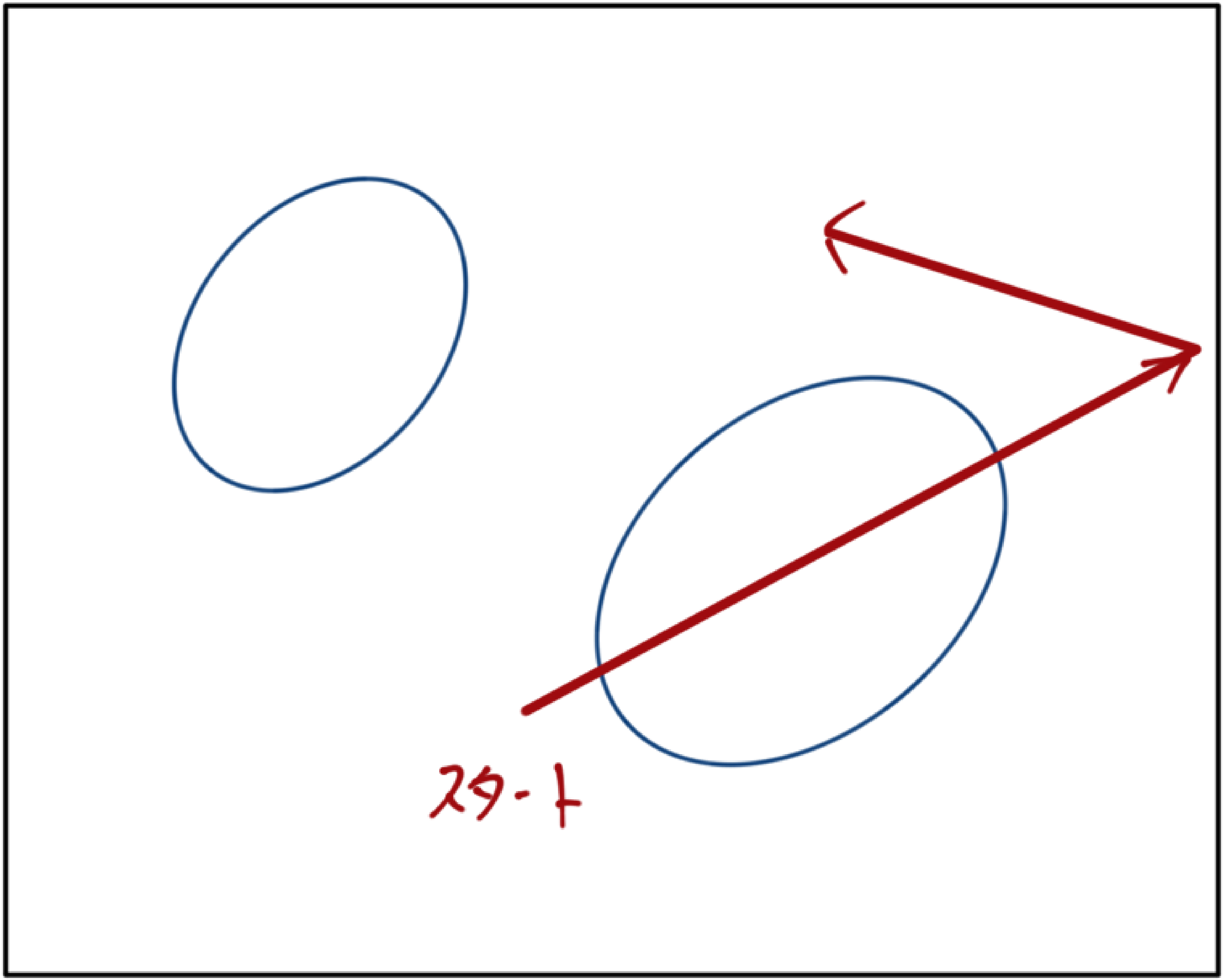
確率モデルが使われる場面

サイコロをふる … 詳細な分析が難しく，それを諦めることで，面白くなるもの

統計力学，熱力学など … 対象となるものが多すぎるために確率的な解釈が自然なもの

力学系，カオスなど … 確率モデルは不自然であるが，最近まで確率的に解釈する以外に数学的な定式化が存在しなかったもの

数論 … 素数分布の解析などにエルゴード理論が使われる．”It is evident that the primes are randomly distributed but, unfortunately, we don’t know what ’random’ means.” R. C. Vaughan


スタート

*Sinai*のビリヤード問題

正方形のビリヤード台でボールが動く．摩擦は無視する．角度を 1 つ決めて，ランダムな点から動き始める．ビリヤード台の上にある水たまりのようなもの A の上を通っている時間の割合と，A の割合は，一致する．

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\lambda\{t\leq T\ :\ x(t)\in A\}}{T}=\frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)}$$

すなわち,「気持ち」としては

時間平均=空間平均

Birkhoffのエルゴード定理

定理 1 (Birkhoff 1931). $\mu(X)=1$ の測度空間 (X,F,μ) 上の写像 $T:X\to X$ が *ergodic* な[1] 自己準同型とする．各可測集合 $A\subseteq X$ に対して，μ の意味でほとんどすべての点 $x\in X$ で，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{1}_A\circ T^k(x)\to\mu(A)$$

[1] 大雑把に言って，空間が複数に分割できない

何が問題か

- 数学としては定義も定理も何も問題がない．
- この「ほとんどすべて」を確率 1 として解釈するのは，自然とは言えない．
- 初期値鋭敏性などの他の性質との関連が見えにくい．
- 計算との関連を調べるのが難しい．

問題 2. 与えられた可測集合 A に対して，計算可能な初期点 x(よって軌道も計算可能) で，エルゴード定理の等式が成り立つものは存在するか？

「ランダムな初期値に対して成立する」と理解し定式化するのが，より直接的で本質的で，計算との関連も調べることができるようになる．

ランダム性

定理 3. 計算可能確率空間 (X, D, μ) とその上の *ergodic* な計算可能関数 $T : X \to X$ に対して,

- $x \in X$ が *Schnorr* ランダムであること
- すべての計算可測集合 A に対して $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_A \circ T^k(x) \to \mu(A)$ が成立すること

は同値.
「すべての *c.e.* 開集合 A」に置き換えた場合は, *ML* ランダム性を特徴づける.

系 4. すべての計算可測集合 A に対して, 上記の等式が成立する計算可能な点 $x \in X$ が存在する.
一方, 上記の等式が成立する計算可能な点 $x \in X$ が存在しないような *c.e.* 開集合 A が存在する.

ランダムな点でのみ正しい関数

計算可能な初期点からの軌道は計算可能である.

$$f(x) = \lim_n \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_A \circ T^k(x)$$

という関数は一般には計算可能ではない．しかし，$\mu(A)$ という値に収束することから,「ランダムな点では正しい結果を返す関数」として近似的に計算できる.（収束の速度が計算できる.）
似た概念は計算複雑性理論において，乱択アルゴリズムや Parametrized Complexity として研究されている．ここでは，それらを測度論の観点から眺めて，力学系の理論に応用してみよう.

計算可能測度論

計算可測集合

計算可測集合 (computably measurable set) とは何だろうか？どう定義したら良いか？
単純のために $X = [0,1]$ と Lebesgue 測度 μ 上で考察しよう．

第 1 案
「集合 A が μ-可測であるとは，外測度を定義して，$\cdots$,」
計算可能性との関連を追いかけるのは大変すぎ !!

Borel集合

第２案
Borel 集合に制限して考える.
Borel 集合族=開集合を含む最小の σ 加法族
開集合=開基 $\{(a,b)\ :\ a,b\in\mathbb{Q}\}$ の和となる集合
（第二可算空間であることが重要.）

開基の測度は常に計算可能.
開集合の測度は一般には計算可能ではない.

計算可能性

定義 5. 実数 $x \in \mathbb{R}$ が計算可能であるとは，計算可能な有理数列 $\{a_n\}$ で $|a_n - x| \le 2^{-n}$ となるものが存在すること．

$n \in \mathbb{N}$ を入力として与えて，x の 2^{-n} 近似の有理数を返すプログラムが書けるということ．

開基の測度は有理数なので計算可能．
有理数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が計算可能であったとしても，
$\bigcup_n (a_n, b_n)$ は計算可能とは限らない．
（停止問題の計算不可能性や，不完全性定理からすぐ出てくる．）
開基の有限和なら計算可能．

開基有限和での近似1

定理 6. 任意の可測集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ と $\epsilon > 0$ に対して，閉集合 F と開集合 G が存在して，

$$F \subseteq A \subseteq G,\ \mu(G \setminus F) < \epsilon$$

が成り立つ．

「可測集合はほとんど開集合」

開基有限和での近似 2

定義 7. A が計算可測集合 (computably measurable set) であるとは，計算可能な開基の有限和の列 $\{B_n\}$ で，
$\mu(B_{n+1} \triangle B_n) \leq 2^{-n}$ となるものが存在して，
$A(x) = \lim_n B_n(x)$ となること．

対象差：$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

命題 8. A が計算可測集合なら，$\mu(A)$ は計算可能実数である．

集合か同値類か

測度論・確率論においていつも問題になるのが，集合や関数を通常の意味で見るのか，測度 0 の違いを無視した同値類で見ているのかの区別である．
計算可能測度論では，ランダム性を導入して考察する．

定理 9. 計算可能な開基の有限和の列 $\{B_n\}$ は $\mu(B_{n+1} \triangle B_n) \leq 2^{-n}$ を満たすとする．$x \in [0,1]$ が *Schnorr* ランダムであれば，$\lim_n B_n(x)$ は存在する．

計算可測集合をランダムな点では定義されている $\{0,1\}$ 値関数として見ている．

計算可測関数

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ が可測関数であるとは，任意の開集合 (もしくは可測集合)$A \subseteq [0,1]$ に対して，$f^{-1}(A)$ が可測集合となること．

定義 10. $f :\subseteq [0,1] \to \mathbb{R}$ が計算可測関数であるとは，任意の開基の有限和 (もしくは計算可測集合) $A \subseteq [0,1]$ に対して，$f^{-1}(A)$ が一様に計算可測関数となること．

注意 11. f は少なくともほとんど至る所で定義されている必要がある．

*Lusin*の定理

定理 12. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ が可測関数であることと，任意の $\epsilon > 0$ に対し連続関数 g とコンパクト集合 K が存在して，$\mu([0,1] \setminus K) < \epsilon$ かつ $x \in K$ に対して $f(x) = g(x)$ となること.

「可測集合はほとんど連続関数」

定理 13. $f :\subseteq [0,1] \to \mathbb{R}$ が計算可測関数であることと，全域な一様計算可能関数列 $\{g_n\}$ と一様 *co-c.e.* 閉集合 K_n が存在して，$\mu([0,1] \setminus K_n) \leq 2^{-n}$ かつ一様計算可能で，$x \in K_n$ に対して $f(x) = g(x)$ となること.

「計算可測関数はほとんど計算可能関数」

L^1 計算可能性

計算可測関数は L^1 計算可能性と深い関係がある．
確率空間 X に計算可能性が入っていれば，その上での $L^1(X)$ 空間にも自然に計算可能性が入る．その $L^1(X)$ での計算可能な点を L^1 計算可能な関数と呼ぶ．

定理 14. $f :\subseteq [0,1] \to \mathbb{R}$ が L^1 計算可能であることと，f が計算可測関数で $\int f \, d\mu$ が計算可能実数であることは同値．

特に，L^1 の意味で計算可能に近似できるならば，ほとんど計算可能関数である．

使い方

例えば,

$$x \mapsto \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_A \circ T^k(x)$$

は，L^1 計算可能関数である．計算可能な測度を持つ co-c.e. 閉集合 U には計算可能な点を含むので，計算可能な点でこの値が $\mu(A)$ と等しくなるものが存在する．

Randomness deficiency

Randomness deficiency

$x \in K_n$ となる最小の n は，x の非ランダムさの度合いを表していて，randomness deficiency と呼ばれる．

この量が無限大であるとはランダムでないことを表していて，有限ならばランダムであることを表している．
有限でも大きければ，ランダムな点に含まれる非ランダムさが大きいことを意味する．

さらに，極限

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_A \circ T^k(x)$$

の収束速度は,「x からは計算できない」が,「x と $x \in K_n$ となる n からは計算できる」.

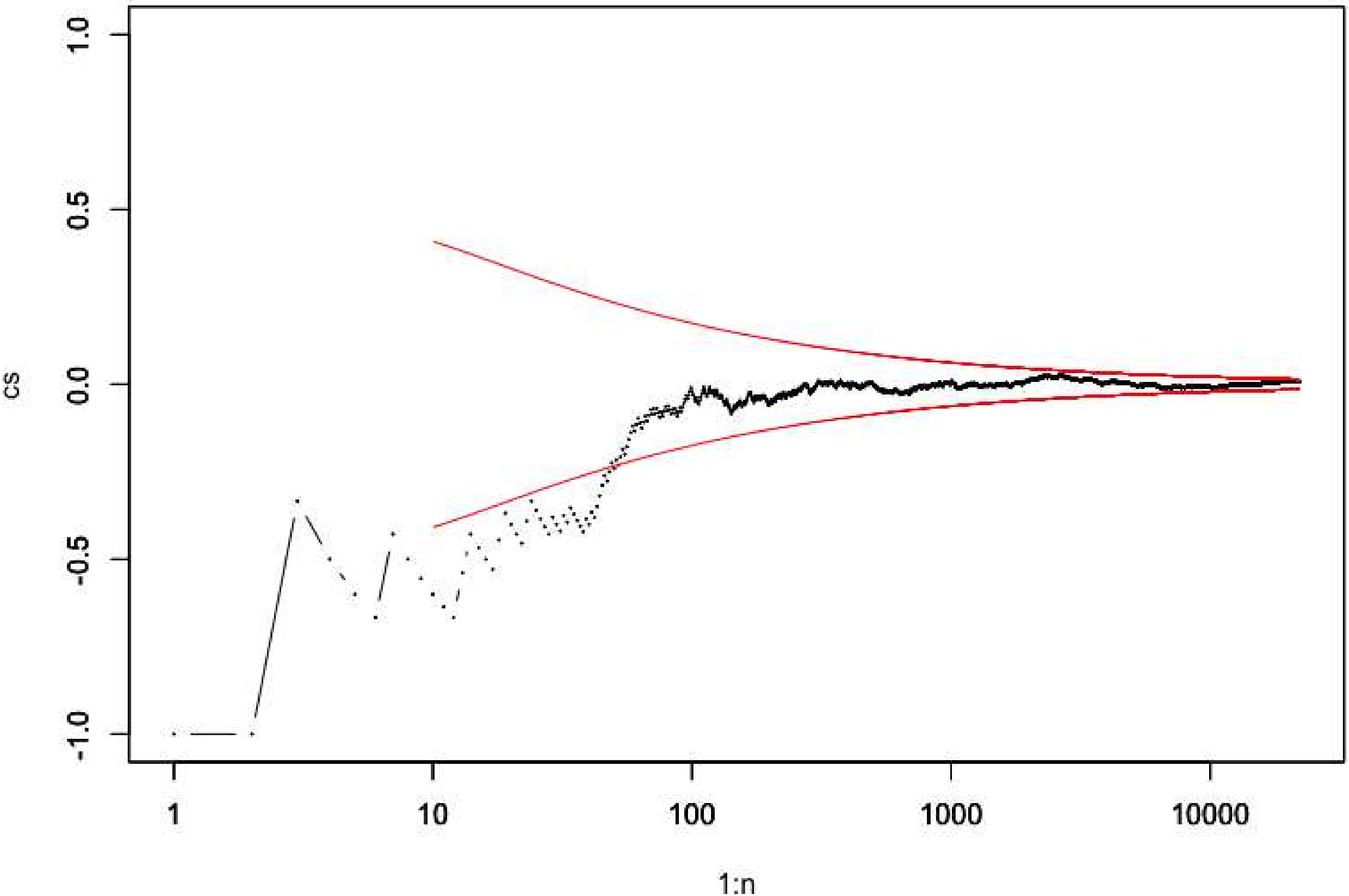
大数の法則の収束速度

$\{X_n\}$ を $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \dfrac{1}{2}$ となる独立同分布の確率変数列とする．$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ とする．
大数の法則によれば，確率 1 で，

$$\lim_n \frac{S_n}{n} = 0.$$

重複対数の法則によれば，確率 1 で，

$$\limsup_n \frac{|S_n|}{\sqrt{2n \log \log n}} = 1.$$



1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
cs
1
10
100
1000
10000
1:n

計算可能性

関数 $Z \in 2^\omega \mapsto \lim_n \frac{\sum_{k=1}^{n} Z(k)}{n}$ は計算可能ではない．ランダムな点では定義されている．
$\epsilon > 0$ に対して，関数 $Z \mapsto \max\{n : \frac{|S_n|}{\sqrt{2n \log\log n}} > 1 + \epsilon\}$ は，計算可能ではないが，ランダムな点では定義されている．
この関数の Z での値が大きければ，Z の Randomness deficiency が大きくなる．Randomness deficiency の上限が分かれば，この Z での値の上限が分かり，そこから収束の速度が分かる．
エルゴード定理でもこれと同じことが起こっている．

まとめ

(i) 測度論における Lusin の定理 (や Egorov の定理) などは自然に計算可能性版が存在する
(ii) 計算可測関数の性質を調べることで，計算のために必要な情報が取り出せる
(iii) 実際に計算を行うためには，計算量などもっと詳細な解析が必要

終わり

ありがとうございました

明治大学
MEIJI UNIVERSITY